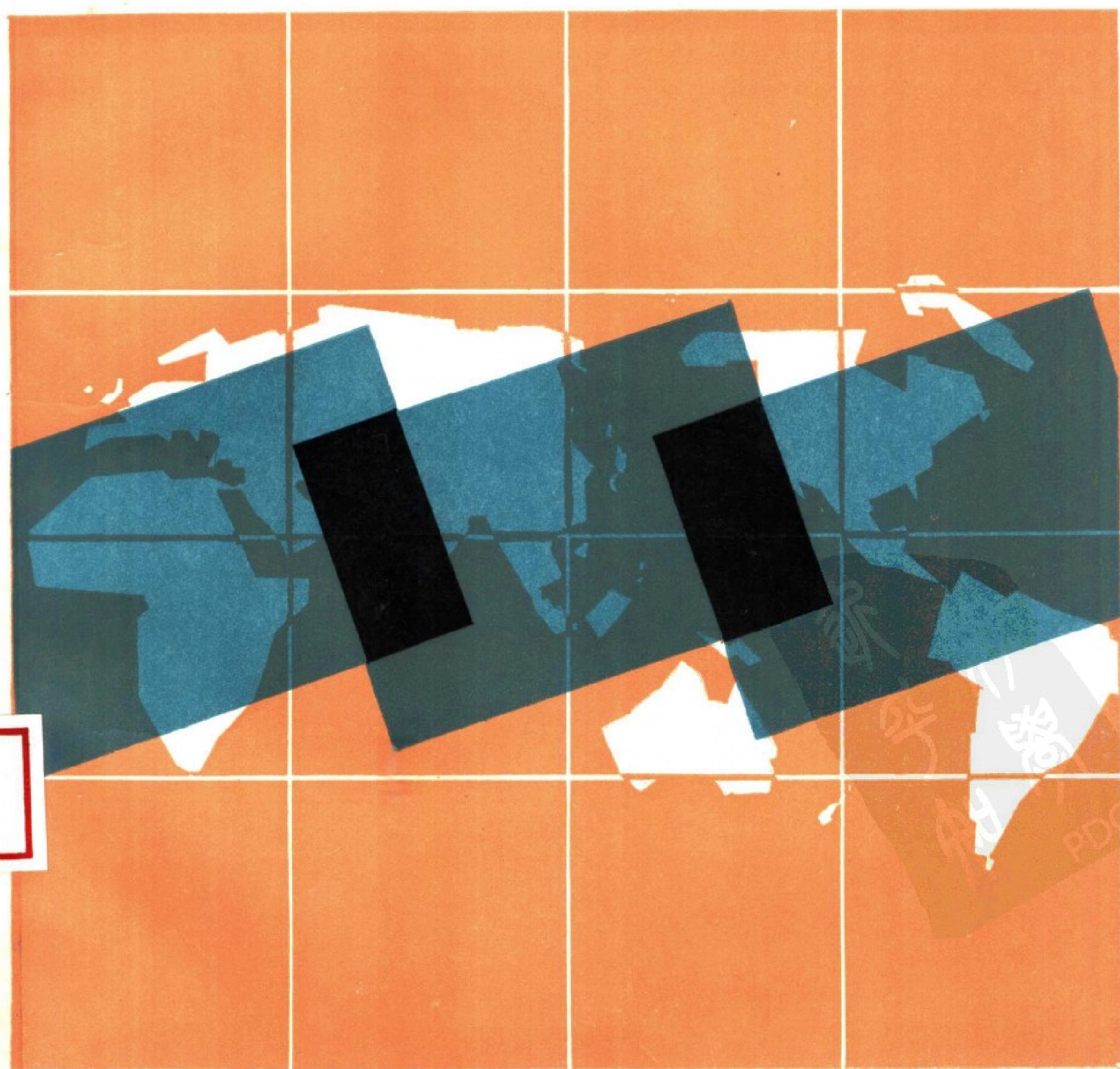
高等学校教材

卫星大地测量学

王昆杰　王跃虎　李征航

测绘出版社



责任编辑：彭　敏
封面设计：赵培璧

ISBN 7-5030-0105-4/P·40
定　　价：4.70元

高 等 学 校 教 材

卫星大地测量学

王昆杰　王跃虎　李征航

测 绘 出 版 社

PDG

(京)新登字 065 号

内 容 提 要

本书分为三大部分：总论，几何定位，动力测地。总论包括现代大地测量的任务和要求；所用各种技术方法的原理；目前能达到的精度和适用于我国的技术；以及卫星绕地运动的基本理论。几何定位是应用最广泛的技术，包括利用子午卫星和 GPS 卫星定位的原理、方法、成果平差计算、精度评定、适用范围等内容。动力测地侧重于研究全球大地测量问题。前两部分约占全书的四分之三。

本书循序渐进、说理清楚，文字流畅，尽量采用直观方法，化繁为简，便于教学。此外，还按各专业不同学时的要求提出了内容取舍的建议。

本书可作为大专院校有关专业的教材，亦可供测绘、地震、地质、海洋、石油等专业的工程技术人员参考。

卫星大地测量学

王昆杰 王跃虎 李征航

*

测绘出版社出版

大兴五中印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所发行

*

开本 787×1092 1/16 · 印张 18 · 字数 404 千字

1990 年 5 月第一版 · 1992 年 5 月第二次印刷

印数 1 801—2 800 册 · 定价 4.70 元

ISBN 7-5030-0105-4/P·40

前　言

本书是为大学测绘专业学生开设卫星大地测量课程而编写的教材。

卫星大地测量是研究解决大地测量问题的一种空间技术方法。大地测量有测定点位和研究地球重力场两大基本任务，因而对应地有卫星大地测量的几何法和动力法之分。但是这两种方法都有许多与常规地面大地测量不同的特点，不仅要综合运用天文测量、地球重力场、测量平差等专业知识，还要涉及较多的数学、物理学和天体力学知识。因此，力求内容详简适当是本教材编写时首先考虑的问题。

揣摩学生学习的心理规律和正确的教学原则，我们认识到，采取直观性与抽象性相结合，系统性与循序渐进相结合的方法，使学生的已有知识与新知识有机地结合，常会受到欢迎，产生好的教学效果。因此，如何使学生既能看到已有知识的新用途，又能顺利学到解决问题的新方法，这也是本教材编写时认真考虑的问题。

卫星大地测量的基本理论和方法已逐渐受到工程测量、航测遥感等专业的重视，但这些专业不可能也不必要象大地测量专业那样花太多学时安排这门课程教学。因此，如何将教材内容适当取舍又不失系统性而能用于这些专业教学，也是本教材所要考虑的问题。

基于以上考虑，本教材将内容分为三部分，即：总论，几何定位，动力测地。

总论部分的目的是简要勾勒全貌，概述卫星大地测量的原理及方法，讲清它与常规大地测量的区别和联系，指明它的任务和作用，并介绍卫星绕地运动的基本理论。

几何定位部分主要讲测定地面点位，以我国有条件利用的子午卫星和 GPS 卫星定位为主，讨论观测设备、观测方法、数据处理和成果应用等问题。

动力测地主要研究全球性大地测量问题。这部分是学习难点。讨论卫星受摄运动和利用摄动效应求解大地测量动力学问题，公式和抽象思维较多。故本教材尽量以大地测量目前及近期可能达到的观测精度来决定这部分内容的取舍，意在尽快触及应用方法和成果。

本教材的第 1～3 章及第 10～11 章由王昆杰编写，第 6 章由王昆杰、王跃虎编写，第 4～5 章及第 9 章由李征航、王跃虎编写，第 7～8 章由李征航编写。全书的总体结构及统一修改由王昆杰负责完成。

本教材对于不同专业的教学要求，取材可如此安排：大地测量本科，使用全部内容，约 80 学时；工、航专业本科或大地专业专科，选用 1～6 及 9 各章，约 50 学时。此外，还可视学生基础、教学条件适当作少量增减。本教材近几年已在不同专业试用，取得了预期效果。

本教材经测绘教材编审委员会审定通过，并承鲁福研究员，许其凤教授、刘萍实副教授审阅，提出了许多宝贵意见，编者表示由衷的感谢！此外，在本教材试用期间，蔡宏翔、

陈春明、向虎雏等同志曾给予积极支持和协助，特在此一并致谢。

由于编者水平有限，难免有错误和不妥之处，诚盼各方指正。

编　者

1989年5月

目　　录

第Ⅰ篇　　总　论

第Ⅱ篇　几何定位

第Ⅱ篇 动力测地

第Ⅰ篇 总 论

第一章 现代大地测量的任务要求

§1.1 地球重力场及其图示

大地测量是地球科学的一个分支，它的基本任务是研究和测定地球表面的相对几何位置，地球的大小和形状，以及地球表面及其外部的重力场，并用数（字）和（图）形表示出来。

地球是一个两极略扁的旋转球体，其内部结构和质量分布复杂易变，表面有不规则的自然地形，周围有大气层，外部空间有月亮、太阳、行星等自然天体，这些因素决定了地球的大小和形状及其重力场分布的复杂性，人们很难用简单的数学方程来准确地描述真实地球的情况，而只能采取近似的方法来表示，随着测量方法和精度的不断改进，理论研究的不断深入而逐步逼近真实地球。

大地测量在地面所观测的量，有几何量也有物理量。例如角度、距离、点位坐标是几何量，重力值是物理量。由于许多测量仪器都是以垂线为准定平的，而垂线取决于重力方向，要将地面垂线为准测得的数据化为以椭球法线为准的数据，要经过垂线偏差的改正，因此就要研究重力方向，即研究重力场。由此可见，大地测量研究的问题既有几何性质又有物理性质，有一定程度的相关性。

地球是个质体，在它周围空间必形成引力场，顾及地球自转，则为重力场。重力是引力的一种特殊表现，基本性质相同。重力场中任意一点的场强可用在该点的重力矢量表示。如果以各点场强的方向为切线，向地球中心依次将这些点联成曲线，这样的曲线称为力线。力线不仅能表示各点场强的方向，也能表示场强的大小，因而也能描述重（引）力场分布情况。力线较密的地方表示场强较大，较疏的地方表示场强较小。如果我们假定地球引力场是中心力场，则力场中任意一点就有引力位，重力场也是如此。任意一点的场强和该点的位有简单关系，即重（引）力位梯度的负值等于重（引）力场强。位是标量不是矢量，如果将位值相同的点联成等位面，则力线和等位面处处正交。如果画出一系列等位面，使相邻位差相等，则可看出，等位面较密的地方表示场强较大，力线也较密；反之场强较小，力

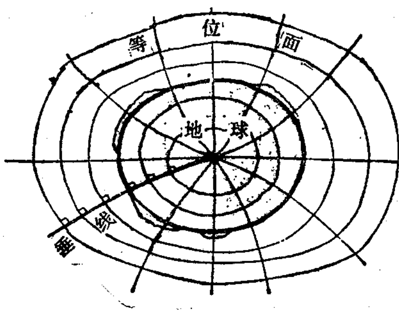


图 1-1

线较疏。

图 1-1 表示地球重力场一个子午剖面的情况，图 1-2 表示局部等位面间场强大小与等位面疏密的情况。

由上两图可见，场强的大小可用重力矢量的大小及方向表示出来，重力矢量与等位面正交，等位面上相邻点的重力方向和大小如果变化大，则等位面的变化也大。场强的大小决

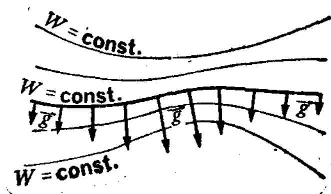


图 1-2

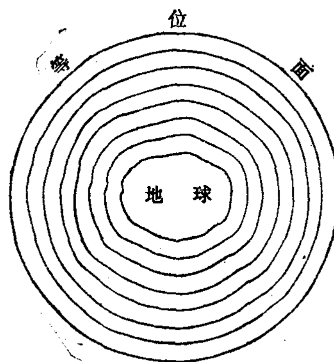


图 1-3

定于地球内部质量引力作用的大小，以及是否严格属于中心力场。由于地球质量分布不均匀，而且有自转产生的离心力，因而各处的重力并不都通过引力中心，但是离地球越远处，这种影响就越小，以致在高空处就逐渐变为中心力场的情况，等位面也匀滑得多，如图 1-3 所示。

§1.2 地球形状的有关概念

地球不是一个纯数学上的几何体，它的形状和大小取决于它的物理属性，因此不能单从几何上考虑，而要顾及物理因素，例如重力的大小和分布，自转速度等等。

研究确定地球形状和大小有过多种近似方法，天文学、地球物理学以及大地测量学都曾根据本学科的需要，采取过不同方法，各自的理论亦不尽相同。历代有许多数学家、物理学家、天文学家和大地测量学家，为此做出过卓越的贡献。他们都遵循一个共同的原则，即理论必须经过实测数据验证之后才确立自己的学说。

最初的近似是纯几何的，曾经把地球看作一个圆球，因为这样最简单，只要一个参数，测定的方法是在地面上量一段距离，再利用太阳（或其他天体）测出这段距离对地心所张的角，即可算出半径。这是牛顿以前将近两千年古代大地测量时期所用的方法。这种近似方法的误差自然很大。若以现代测定的地球椭球长短半轴取平均作为球半径，则在赤道或两极会相差 10.7km 之多。

1.2.1 双轴椭球（旋转椭球）

自从牛顿的引力理论问世以及他的地球是扁球的学说得到验证，并经克莱劳加以发展

之后，地球形状和大小就不仅从几何上也可从重力分布规律上来研究。实测数据的精度也因为发明了三角测量方法和望远镜而有所提高。近似表示地球的几何大小开始用双轴旋转椭球，两个几何参数。实测是利用三角测量并测定天文经纬度的子午弧测量原理，即利用以下关系：

$$\left.\begin{aligned} s_{ij} &= a(1-e^2)\int_{\varphi_i}^{\varphi_j}(1-e^2\sin^2\varphi)^{-3/2}d\varphi \\ f &= 1-\sqrt{1-e^2} \end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

测出子午弧长 s_{ij} 及纬度 φ_i、φ_j，用两个以上方程即可解出未知的椭球半长轴 a 及扁率 f。

当时根据克莱劳理论，虽已知道可利用重力测量来确定地球形状和大小，但是限于当时的技术条件实现不了。

1.2.2 大地水准面

整个 19 世纪是几何大地测量发展很快的时期，有不少科学家根据天文-大地测量成果计算出代表地球的双轴椭球几何参数，但同时也发现了用这样简单的几何形状不能反映地球的真实情况。

德国数学家高斯(JK. F. Gauss, 1777-1855)，物理学家李斯丁 (J. Listing, 1808-1882) 先后提出用大地水准面来表示地球形状。由于这个曲面有明确的物理意义，在地球上实际存在，很大程度上能反映地球的真实情况，因而一直沿用至今。

大地水准面被定义为旋转均质流体的平衡表面，是一个重力等位面。由于地球表面有72%的海洋面，而且海水大体上是均质的，因此未受外界扰动情况下的平均海水面基本上就是大地水准面的一部分。

但是大地水准面仍然是一个很复杂的曲面，如果用数学式描述，要用一个无穷多项的函数级数才能足够严密地表示它。如果要作最佳拟合，则要采用一个有物理意义的双轴旋转椭球，将这个椭球定义为一个均质的符合流体静力平衡规律的水准椭球，它的质量等于地球的总质量，它的外表面与大地水准面拟合得最好。由这个椭球形成的重力场叫做正常重力场，也就是在这个椭球面上的重力分布可以用正常重力公式计算。这个椭球的中心与地心重合，短轴与地球极惯性轴重合。这样一来，就可以把几何参数和物理参数统一结合起来。

这种椭球也称为正常地球椭球或平均地球椭球，或总椭球，地心国际椭球等。显然，由于正常椭球只是大地水准面的最佳近似，因而就形成了一些成对的量，如：真实重力场与正常重力场，真实等位面与正常等位面，真实垂线与正常垂线，真实位与正常位，真实重力与正常重力，大地水准面与正常椭球，等等。

如果将大地水准面相对于正常椭球的高度画出全球等值线，可如图 1-4 所示。

若再想了解在赤道剖面及子午剖面上大地水准面对于正常椭球的拟合情况，可由图 1-4 作出相应剖面。如图 1-5 及 1-6 所示。不过为了看得清楚，在这两个图中所表示的两面之间的差别已被夸大了一万倍。

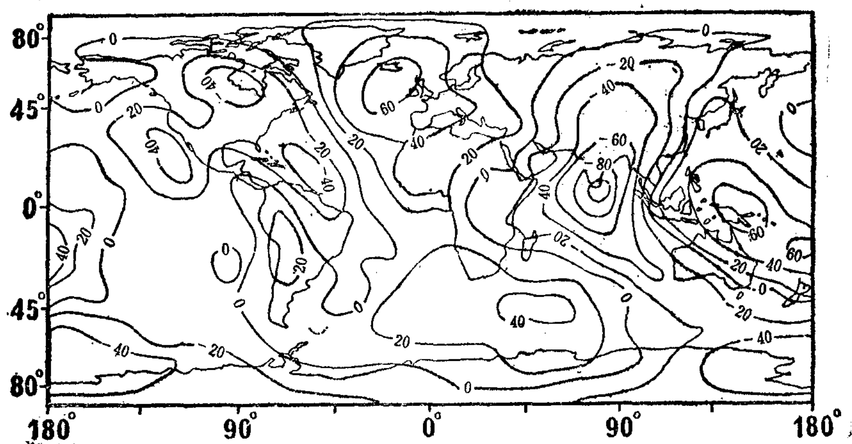


图 1-4 大地水准面相对于1967年国际椭球的高度(单位：m)

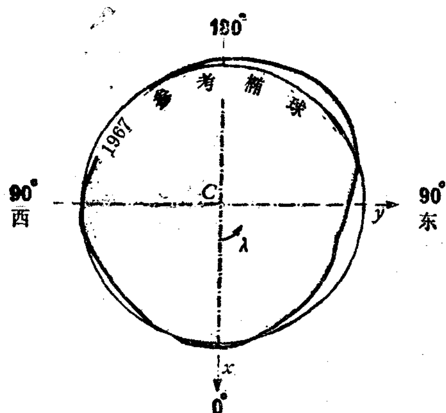


图 1-5 赤道剖面

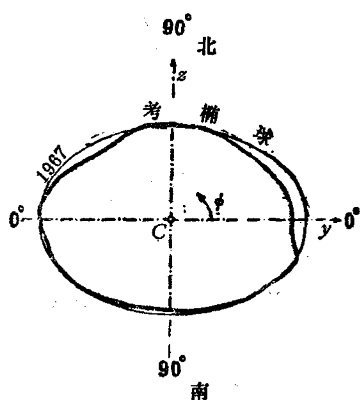


图 1-6 子午剖面(λ=90°)

1.2.3 三轴椭球

从以上三个图来看，还不能充分做到最佳逼近，因此最好用一个三轴椭球，这样的椭球才有可能最接近于大地水准面。三轴椭球有三个互相正交的轴：短轴、中间轴、长轴，分别用 $2b$、$2c$、$2a$ 表示。短轴仍与地球极惯性主轴重合，其余两轴都位于赤道面上。计算时要同时定出两轴的指向。决定这种三轴椭球的的参数有四个，即

① 长轴的半长 a；

② 极扁率 $f\left(=\dfrac{a-b}{a}\right)$；

③ 赤道扁率 $f_e\left(=\frac{a-c}{a}\right)$；

④ 长轴的经度 λ_e。

上列参数已有一些大地测量学家计算过。其中较近的成果如1971年捷克大地测量学家布尔沙（Bursa）计算的，数据如下：

$$a=6378173\text{m},\qquad \lambda_e=14.8°\text{W}$$
$$c=6378105\text{m},$$
$$f^{-1}=297.787,\qquad f_e^{-1}=94000$$

用这样的三轴椭球拟合全球大地水准面的等值线图，如图1-7所示。

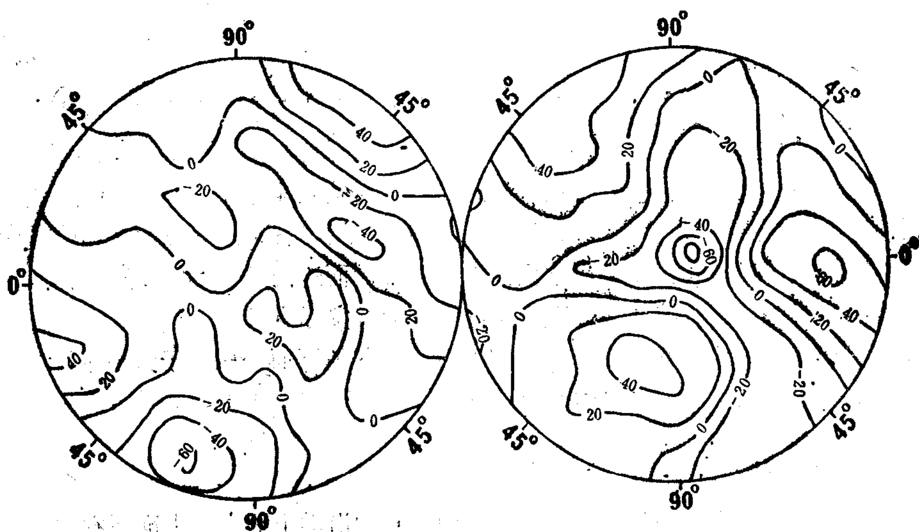


图 1-7 大地水准面相对于三轴椭球的高度(单位：m)

若用上列参数值与图1-5及1-6所示的双轴椭球拟合情况比较，可以看出在赤道上有明显改善。这样的三轴椭球基本上就是所谓梨形地球的数学体。

尽管从全球来看，三轴椭球最接近于大地水准面，但是对于局部地区建立水平控制网的二维坐标计算，仍宜用一个局部拟合最好的双轴椭球，这样局部拟合的两面之差可能比全球拟合的更小，而且水平坐标的计算也较简单。

1.2.4 似大地水准面与似地球面

现代大地测量理论中还定义了似大地水准面和似地球面这两个概念，这是莫洛琴斯基研究高程系统时用到的。

参阅图1-8，地面任一点对于椭球的大地高等于该点的正高 H 与大地水准面对于椭球的高度 N 之和，但 H 很难算出来，因此大地高通常是表示为正常高 H^{γ} 与高程异常 ζ 之和，而 H^{γ} 可以用水准测量测得的高差加上一个小的改正而算出来。因为 $H^{\gamma}\neq H$，故

$N \neq \zeta$，若从地面点沿力线（法线也可）向下量取 H' 长的线段，其端点就不在大地水准面上，而得到另一点。

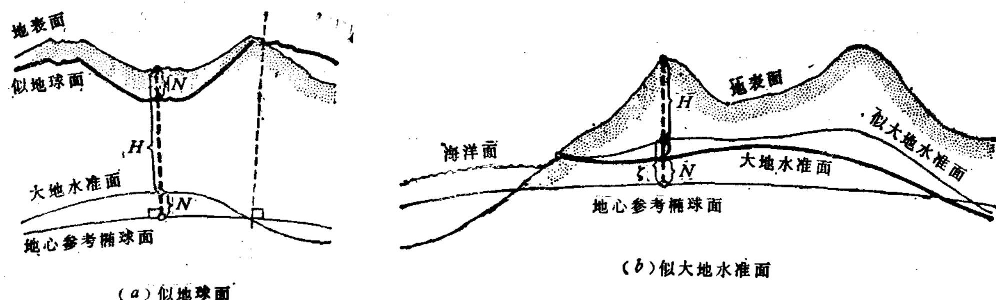


图 1-8

如果对无数地面点都这样做，就会得到无数个不在大地水准面上的点，这些点所形成的一个曲面就叫做似大地水准面；反过来，若从椭球面开始向上量取 H' 线段，又会得到无数个不在地球面上的点，这无数个点形成的曲面就叫做似地球面。

似大地水准面没有任何物理意义，纯是数学假定，当然就不是等位面。它的最大优点是将大地高分成可测量高和似大地水准面高度两部分，而这两部分都能根据地面测量值精确地计算。因此用似大地水准面作为高程系统的基面有实际意义。

似大地水准面与大地水准面在海洋上相重合，在陆地下面一般高于大地水准面，$N-\zeta$ 的大小视地形而定，在高山地区可达几米。而平原地区仅有几厘米。

1.2.5 海面地形

海面地形也是现代大地测量的研究内容，因为它和海洋上的大地水准面有密切关系。

海面比起地面来不稳定得多，它在各种因素影响下时时在变，设置在海边的验潮站可以观测到瞬时海水面的变化。

从瞬时海水面观测值可以了解到，它在一天内的变化可达几十米，但一个月的平均则不超过几分米，由几十年观测资料分析可知，年平均值一般稳定在几十厘米。本节前面提到的平均海水面就是指瞬时海水面在较长时期内的平均面。

引起海水面振荡的因素有的是周期性的，有的是相对长期性的。大致划分起来，周期性的因素有：大气层的变化(包括气压、气温、风暴等等)，潮汐，冰融，河流入海的涨落，海流方向的变化，地极移动引起的变化等等。相对长期性的因素有：赤道带的常年高温两极的常年低温，海水含盐量区域性分布的差异，等等。这些因素所产生的效应有些可以测出来，有些还不能。但是从长期观测海水面变化的资料可以发现，平均海水面不同于无扰动的均质流体平衡面。

所谓海面地形，就是指这种平均海水面与大地水准面之间的偏差，类似于地球自然地形表面相对于大地水准面的偏差，不过数值要小得多，一般 1m 左右。图 1-9 是这种偏差的等值线图，它有助于了解海面地形的变化情况。

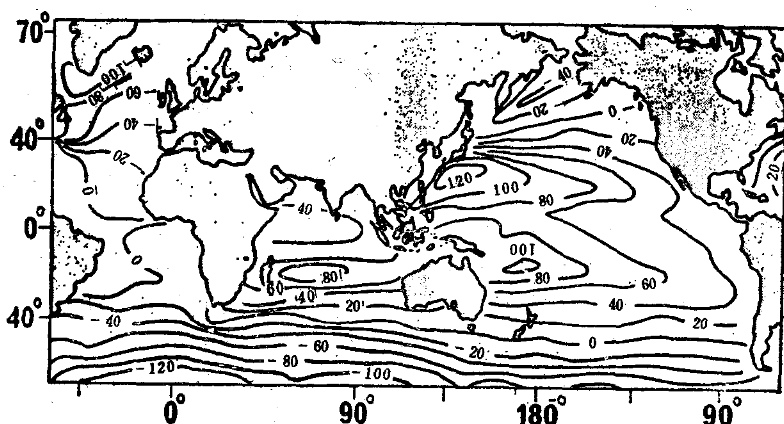


图 1-9 海面地形(单位：cm)

§1.3 地球的形变

地球不是刚体，地球在运动，地球的形状会变，引起地球形变的力有自然界的也有人为的，因而有全球性变化和局部性变化，有持续性变化和突发性变化。地球潮汐，冰川作用，地壳的构造运动，地下资源的大量提取，大型水库的兴建，等等都会引起形变。地形变包括地壳的垂直升降和水平倾斜。形变后地球内部质量的重新分布，又会引起地球运动状态的变化(例如自转的加速或减速)，力学特性（转动惯量）的变化，重力场的变化。如果说地面点位置的变化是地壳运动的几何信息，则地球重力场（重力值）的变化就是地壳运动的物理信息。现代大地测量要分担提供这类信息的任务。

地球形变不仅决定于引起形变的力，还要取决于地球体本身的物理属性：是刚体，不会有形变；是流体，则服从流体平衡规律；是弹性体，则当形变力一移开应立刻恢复原状；如果是有粘滞阻尼的弹性体，则当形变力移开后，就不是立刻而是慢慢地恢复，至于是否能完全恢复原状，还要看形变力的性质和作用的时间。

根据其他地球科学学科的研究，有许多迹象表明，地球的地核是流体，密度最大，地幔介于流体与固体之间，密度较大，上部的地壳则是疏松的固体。在地心引力产生的恒定应力作用下，地球的物理属性接近于一个高度粘滞的弹性流体。我们不妨将这个分析与二百多年前克莱劳的地球形状理论作一比较。克莱劳当初就是假定地球扁球内部质量的密度由地表向地心逐渐增大，是地球半径的函数，可以分层，各层均质，各层的扁率连续变化，从而把地表重力值随纬度变化的关系建立起来，得到了著名的克莱劳方程。1972年梅切尔(Melchior)根据克莱劳理论写出了扁率和分层密度分布的关系式，后经莫里兹(Morite)证明。现代测得的地球扁率 1:298.25 完全满足该式(见参考文献[15])，因此克莱劳的理论在现代仍有重大价值。

用大地测量方法研究地球形变，只是近几十年才开始的。由于在本世纪50年代，大

地测量的相对精度一般只可达 10^{-6}，对于地球半径而言，测量误差约为±5m，对于重力值则为±1(mGal)，因此有许多变化发现不了。而在目前，大地测量的精度已可达 10^{-8}～10^{-9}，一些大地测量基本参数如 GM，γ_e，a_e，f 的测量精度也已高于 10^{-8}，因此就有可能提供地球形变的信息。

各种因素引起的地球形变，若按对时间的函数关系来分析，可以分为长期变化(近于线性)、周期变化(长周期约几十年以上，短周期可从几分之一秒到几十年)和偶然变化。就频率而言可分为高频与低频变化。不同的地球科学学科对这些变化各有自己的研究重点，通常大地测量侧重于研究长期的低频的变化，周期在几个小时以上到几十年，而其他学科有的可能更关心几百年乃至几千年或更长历史时期所发生的变化。

潮汐引起的形变周期性最为明显。为了提供一个数字概念，表 1-1 列出目前测得的潮汐形变引起的重力变化；地面倾斜和等位面相对升高最大变化值。

表 1-1

潮汐形变效应	最大变化值
重力变化	0.28mGal
地面相对倾斜	0.017″
等位面相对升高	63 cm

地球形变的长期及长周期现象由于系统研究的时间还不够长(仅几十年)，无论定性或定量的了解都还不充分，因此很难断定目前得知的一些长期现象是否一定是线性的，或许是长周期的。大体上，目前长期性变化的数量级，在长度上最大约为 60cm，角度上约为 0.02″，地表重力约 10μGal(见参考文献[36])。

§1.4 现代大地测量的任务

如果从人们确认地球是个圆球并实测它的大小（见§1.2）时算起，两千多年的大地测量历史大体上可分为三个阶段：古代大地测量，经典（或传统）大地测量和现代大地测量。其中经典大地测量阶段可以从十八世纪中期牛顿、克莱劳确立地球为扁球的理论并从几何和物理两方面来测定地球时算起，到二十世纪中期莫洛琴斯基发展了斯托克司理论形成现代地球形状理论基础为止，差不多整整二百年(1750～1950)。

经典大地测量阶段的主要任务是为大规模测绘地图服务。因此为了能精确地测定大地点位置，许多科学家在测量器具、测量方法、椭球计算、数据处理等方面做过大量研究。我们大地测量上现在所用数学方法大部分都是那个时期发明的。其中尤以高斯在理论和实践方面的研究贡献最大，最小二乘法就是他的许多发明成果之一。这个时期由于全球各大陆广泛布设了天文大地三角网，并发展了重力测量，算出了许多著名的双轴参考椭球体几何参数，其中有的后来被推荐为国际椭球(如海福特（Hayford）椭球曾被命名为 1924 年

国际椭球)，还有许多正常重力公式，其中卡西尼（Cassini）计算的公式被推荐为1930年国际正常重力公式。此外大地测量技术的应用效果也很显著，例如法国为统一长度标准建立国际米制应用了子午弧长测量的结果，世界高峰高度的测定，海底地图的测量等等都与大地测量有直接关系。

这个时期大地测量理论的发展也很深入。著名的有：赫尔默特（Hermert）写的《大地测量的数学物理理论》，斯托克司研究的大地测量边值问题，庞朩莱(Poincare,1854-1912)的地球潮汐理论等等。

现代大地测量是在二十世纪中期科学技术发展的推动下形成的，其中电子技术和空间技术的发展是决定性的因素。电磁波测距仪器的出现改变了大地测量过去主要依赖测角精度的局面，使大地测量成果很快提高到10^{-6}量级；电子计算机的出现不仅使大地测量的作业周期大大缩短，而且使过去一些理论严密但计算量极大而无法实现的问题成为可行的事；人造卫星和空间技术的发展，更使大地测量产生了划时代的巨大飞跃，它不仅能使地面点精确定位测量不必再受地面条件的种种限制，使建立全球地心大地测量坐标系有了可能，而且使研究重力场特别是外部重力场几何图形能够迅速实现。尤其重要的是空间技术使大地测量的功能更为扩大。如前所述，现代大地测量的精度和效率已能配合其他学科用于空间、海洋、以及测定地球的种种动力学变化。

因此，我们可以概括地说，经典大地测量是以刚体地球为研究对象，是静态的局部的相对的测量，而现代大地测量则是以可变地球为对象，是动态的全球的绝对的测量。

现代大地测量的直接任务是：①几何定位；②测定地球重力场；③研究点位及重力场的变化。如果要再具体一点，不妨引用 1978 年美国国家科委关于现代大地测量的一段论述(见参考文献[15])：

1. 建立与维护国家的及全球的地面三维大地网，并研究其变化情况；
2. 测量并描述地极移动、地球潮汐、地壳运动等地球动力现象；
3. 测定地球量力场及其随时间的变化。

第二章　卫星大地测量的基本原理和方法

§2.1　引　　言

卫星大地测量是现代大地测量的一个重要组成部分，是以测定近地人造卫星（包括其他人造天体）的空间位置和运动异常来解决大地测量问题的一种方法。它的基本原理实际上在人造卫星出现之前就已形成。当时是以地球的天然卫星（月球）为观测对象。最早提出可以利用对月球的观测值研究地球形状的是欧拉（I. A. Euler, 1734-1800）和拉普拉斯（P. S. M. Laplace, 1749-1827）。欧拉是单纯从几何上考虑，根据布置在同一子午圈上不同测站所测的月球天顶距，已知测站纬度和大地高，以及月球的地心坐标，利用月球赤道地平视差与测站椭球坐标的几何关系，解算出该子午圈的扁率，1768年发表了他的论文；拉普拉斯则是从动力学上分析月球绕地球运动的轨道异常。1767年起，他根据月球黄经及黄纬变化的实测值与理论值不一致而在理论式中加上的经验项，研究出这个经验项是由于地球扁率的影响，并作了详细分析计算。这个发现在当时有很重要的价值，以致拉普拉斯曾经欣慰地说过：现在天文学家可以不出天文台就能计算地球扁率了。欧拉和拉普拉斯的研究成果后来又经赫尔默特，兰伯特（W.D.Lambert）等许多人研究发展，提出过利用月球视差、月掩星、日食等自然条件来解决大地测量问题。不过实际作用不大，主要是因为已知量精度不够，月面边缘不齐难以测准，月球太远形成的视差角太小，并且因其远而对地球引力场异常的敏感性不高，难以获得高精度的结果。但是这种利用天体的空间测量方法的基本思想是很先进的。所以本世纪前50年间又有许多人从观测方法、观测仪器方面加以改进。采用过摄影法，光电法，分光光度计法等等，同时努力提高测月缘及记时的精度，1946年还曾试验过用氢气球将发光光源升入高空达25 km处作为空中目标，供地面两站同时观测。当时求出了两站相距约150 km的弦长，方向精度达到±2″。所有这些都为以后的人造天体用于大地测量准备了理论和实践基础。

人造卫星（天体）用于大地测量，同样也是从几何原理和动力学原理两方面加以研究，但它比月球更方便更有利。如果说月球的视差角太小（小于1°），人造卫星则可以大到几十度；月球离地球较远且质量较大，它的运动除受地球引力作用外还要受太阳及行星等其他天体相当程度的影响，而人造卫星离地球近且质量小，它的运动几乎完全决定于地球引力场；月球绕地球一周将近一个月，而人造卫星在这段时间里可绕地球近400圈，可以迅速收集到大为丰富的有关地球情况的资料。

此外，由引力定律可知，离地球越近的人造卫星相对而言对地球引力场的变化就越敏感，反映到卫星的轨道运动上出现的异常就越明显。因此，人造卫星既可以从几何上看成是一个空中的动目标，还可以是一个反映地球各种变化的信息传感器；包括几何点位及重力场变化的信息，生态、自然及资源变化的信息，等等。

§2.2 基本关系式

设如图2-1所示，一个人造卫星S绕地球运动，轨道是个椭圆，地球质量中心O是此椭圆的一个焦点，我们暂时假定地球的全部质量都集中于地心O，这样，卫星就是在中心力场中运动。它运动所在的轨道面就是一个平面轨道，椭圆就是平面曲线。取直角坐标系$O\text{-}XYZ$，Z轴指向地球北极，X轴指向春分点♈，卫星S在此坐标系中的位置矢量为$\vec{r}_S$，地面某测站T在此坐标系中的位置矢量为$\vec{r}_T$，此时若在T测得至卫星的观测矢量$\vec{r}_{TS}$，于是地心、测站以及卫星之间的关系便可确定。

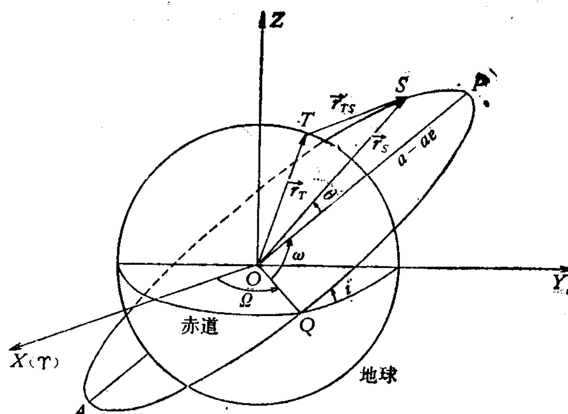


图 2-1

$\vec{r}_S$在轨道平面上，轨道面与地球赤道面的交角为i，两面交线与赤道形成两个交点。其中一个Q是卫星由赤道以南升向赤道时的交点，称为升交点。升交点在赤道上的位置用升交点赤经Ω表示。卫星轨道椭圆的长轴为AP，P点是距地心最近的一点，称为近地点。近地点与升交点之间的关系用近升距ω表示。卫星S与近地点之间的关系用近点角θ表示。显然，Ω和i可以确定轨道面相对于赤道面的位置ω可以确定轨道椭圆在轨道面上相对于交点线的位置，轨道椭圆的大小和形状用半长轴a及偏心率e表示，于是$OP=a(1-e)$。

如果轨道面及轨道椭圆不变，则a，e，i，ω，Ω这五个量是常数，仅θ随卫星在轨道上的运动而变。在这种情况下，卫星运动服从开普勒定律，卫星轨道就称为开普勒轨道，上述六个量称为六个轨道根数（或参数）。但是，地球是椭球，内部质量分布密度并不是均匀或对称分布，不是仅取决于离地心的半径，不能如前面所述认为质量集中于地心，此外，卫星还要受到地球大气层以及其他天体等的种种扰动，因此卫星的实际运动轨迹不是平面曲线，而是复杂的类似于空间螺旋状那样的曲线。这样一来，不仅轨道椭圆在变，轨道面也在变，严格地讲无所谓椭圆，也没有这样的轨道平面。不过扰动毕竟小，一般可以近似地把这种复杂的运动分解为瞬时的正常运动部分和异常运动部分，正常运动就是上述的开普勒运动，异常运动常称摄动，用轨道根数的变化来反映。这样，所有轨道根数就都是变数，是时间函数，卫星的位置矢量$\vec{r}_S$当然也就会有异常的变化，是所有可变轨道根数的函数。

参照图2-1，可将测站、卫星及地球质心三者的关系表示如图2-2。由图可知：

$$\vec{r}_S=\vec{r}_T+\vec{r}_{TS}=\vec{r}_T+r_{TS}\cdot\frac{\vec{r}_{TS}}{r_{TS}} \tag{2-1}$$

式中 r_{TS} 表示测站对卫星的观测矢量的长度，$\frac{\vec{r}_{TS}}{r_{TS}}$表示观测矢量的方向，即单位矢量。这个关系式就是卫星大地测量的基本关系式，它无论对于解决几何性质的问题，即测定测站或卫星的几何位置，或是解决动力学性质的问题，即测定地心坐标或重力场，都是适用的。

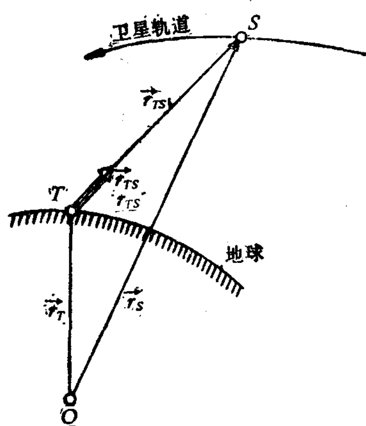


图 2-2

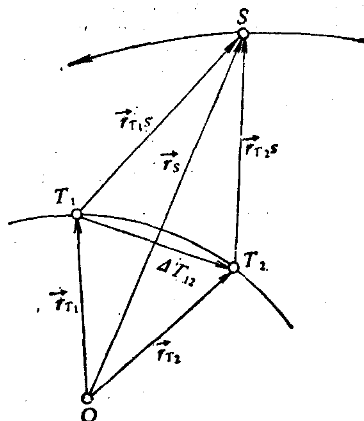


图 2-3

如果不是要测定地面点的地心坐标，仅要求象传统三角测量那样布测一个地区或全球的地面三角网，以确定各点间相对几何位置，则由（2-1）式可知，可以用消去地心位置矢量$\vec{r}_S$ 的方法纯几何地实现，这时卫星仅作为一个供观测的空中目标。例如，由地面两点 T_1 及 T_2 同时观测卫星 S，如图（2-3），则

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_S &= \vec{r}_{T_1} + \vec{r}_{T_1S} = \vec{r}_{T_2} + \vec{r}_{T_2S} \\ \Delta\vec{T}_{12} &= \vec{r}_{T_2} - \vec{r}_{T_1} = \vec{r}_{T_1S} - \vec{r}_{T_2S} \end{aligned}\right\} \tag{2-2}$$

可见两点间的矢量$\Delta\vec{T}_{12}$可以与地心无关地完全由地面观测矢量来确定，坐标原点可以在地面任意选定。反之，如果是求地面点的地心坐标，即坐标原点在地心，那就必须知道卫星的地心矢量，解决这个问题则要根据引力定律求解卫星运动的二阶微分方程。这些内容以后再讨论。

§2.3 方向测量

上述每一观测矢量都包含确定它的长度和方向两个观测量。但是，和地面三角网类似，单测方向或单测距离都可以构成卫星空间三角网，必要的条件是要几个（至少两个）地面测站同时观测卫星。同时观测又称同步观测或同步跟踪观测。

仅测方向的同步方向观测，每测定一条由两个测站点联成的空间直线的方向，至少要在这两个测站上同步观测卫星位置两次，这两次可以是同一卫星运动到两个不同的位置，

也可以是两个不同的卫星。如图 2-4 所示，测站为 T_1 及 T_2，两个卫星 S_1 及 S_2。在 T_1 及 T_2 先同时对 S_1 测得方向 $\vec{a}_1$，$\vec{b}_1$，然后又对 S_2 同时测得方向 $\vec{a}_2$、$\vec{b}_2$，两测站联线 T_1T_2 的方向用 $\vec{c}_{12}$ 表示。这里的各矢量都是单位矢量，仅用以表示方向。再令 $\vec{n}_1$ 及 $\vec{n}_2$ 表示平面 $T_1T_2S_1$ 及 $T_1T_2S_2$ 的法向单位矢量。则得

$$\left.\begin{aligned}\vec{n}_1=\vec{a}_1\times\vec{b}_1,\qquad \vec{n}_2=\vec{a}_2\times\vec{b}_2\\ \vec{C}_{12}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2\end{aligned}\right\}\tag{2-3}$$

如果卫星位于 S_1 及 S_2 等位置时，不只是被两个测站观测，例如还有 T_3、T_4 测站也做了类似的方向观测，同样也可求得两两测站之间的方向，例如图 2-5 中的 $\vec{C}_{12}$，$\vec{C}_{24}$，$\vec{C}_{32}$，$\vec{C}_{41}$，$\vec{C}_{43}$ 等方向，这样就构成了许多三角形，而且产生了可供平差的共面条件。即：

$$\left.\begin{aligned}\vec{C}_{12}\cdot(\vec{C}_{24}\times\vec{C}_{41})=0\\ \vec{C}_{24}\cdot(\vec{C}_{43}\times\vec{C}_{32})=0\end{aligned}\right\}\tag{2-4}$$

以及（2-3）式那样的许多条件。

依此类推，就可布测出广大地区乃至全球的空间方向卫星网，如图 2-6 所示。

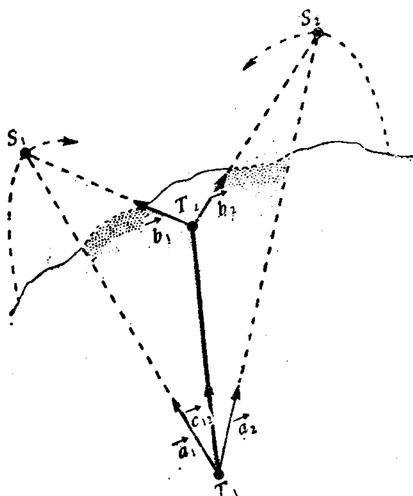


图 2-4

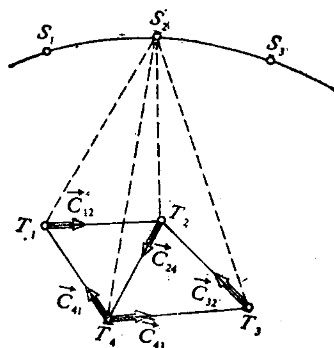


图 2-5

方向测量是在晴晚以恒星星空为背景对卫星进行光学摄影，底片上留下卫星和恒星两种影象，利用恒星星表查知有关恒星的坐标（α，δ），然后在底片上精确量算出卫星在同步观测时刻的赤道坐标，即卫星的方向值，参见图 2-7。这样测得的卫星方向以及空间方向网是在天球赤经赤纬坐标系内定向的，如果也测定了观测时刻的恒星时，即可化为在地球时角坐标系中定向的方向。

方向测定的精度取决于光学成象、折光、闪烁及恒星坐标的精度，在摄影底片上量测的精度约为$\pm0.1''\sim0.2''$。

方向网只能确定网的形状，而它的尺度还需要至少有一条边的已知边长才能确定。一

般可以直接对卫星测距也可选地面适当的边，用空间导线或基线网联接，按地面测距的方法测定。这种网的精度当然也和地面三角网类似，与图形强度及基线多少等问题有关，也存在最佳网形和临界网形以及介乎这两者之间，能以最少工作量而获得最有利网形的选择问题。

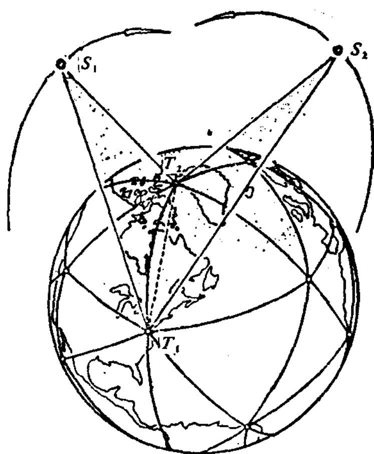


图 2-6

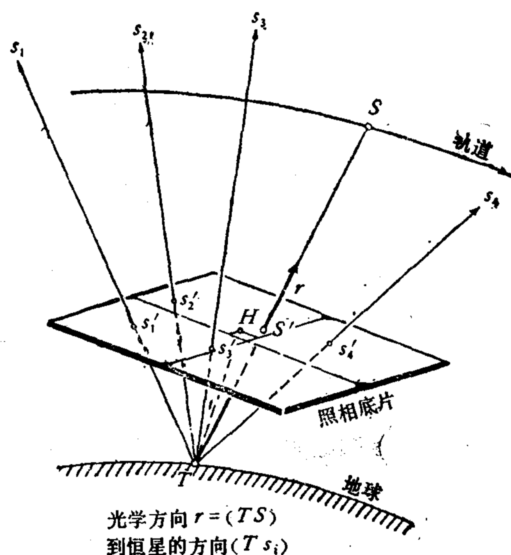


图 2-7

要实现对卫星摄影，卫星必须有亮度。大外数供方向观测的卫星是靠反射太阳光，少数可以自己发光。例如气球型卫星回声（ECHO）号，帕吉奥斯（PAGEOS）（参阅 2.8）自己不发光，安娜（ANNA）卫星自己能发氖光，但是卫星相对于观测者运动速度相当快，恒星也相对于自转着的地球有视运动，如果摄影机固定不动，即使对准卫星，在底片上成象的卫星和恒星都不是光点影象而是线迹，只随快门开闭而有间断，因此摄影机要设计得或是能跟踪恒星运动，或是能跟踪卫星运动，前者恒星成象是点，卫星是线，后者相反。再加上有记时装置，快门定时启闭，使线迹均匀断续，以便于在一张底片上量出多个观测值，归算后取其平均以提高精度。

可供卫星摄影的摄影机有许多种，同一牌号的又有多种规格，能跟踪恒星或卫星或者固定式的都有，焦距从 300～1000 mm，孔径从 100～600 mm。有代表性的且实际使用较多的有以下几种：

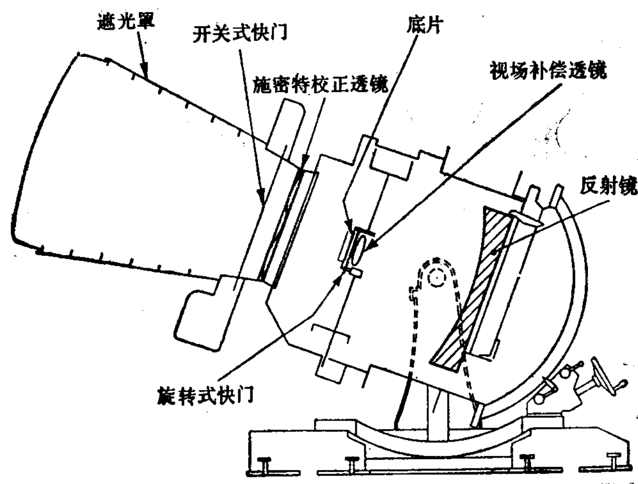
[美]Beker-Nunn（贝克-隆）摄影机：可跟踪，焦距为 510 mm，孔径为 500 mm，能拍摄暗星（到 12 等星），因此几乎可跟踪任何可供光学摄影的卫星。体积大，重约 3 吨，底片上星象位置量测精度可达 0.002 mm，相应于 0.01″，但实际方向精度通常是 3″。记时用石英钟。记录卫星观测时刻准确到 0.002s。这种摄影机在六十年代曾用来取得一百万个以上的高精度观测值，在全球卫星方向网中有 12 个站装备过这种摄影机，测得的点位精度约 10 m。后来由于激光测距的精度大大超过了它（可达 10 cm）。所以现在不太使用了。

［英］Hewitt（休伊特）摄影机，不能跟踪，焦距为 610 mm，孔径 610 mm。虽然它的孔径比贝克-隆大，但不能拍摄暗星，因为每次曝光时它不能跟踪卫星，最多只能拍摄到 7.6 等星，但方向精度可达 1″，比贝克-隆好。这种摄影机一共制造过两台。起初用于跟踪记录导弹弹道。1967 年全部被英国陆军测量局买去用于观测帕吉奥斯卫星建立欧洲卫星三角网。1978 年陆军测量局因任务改变，不着重研究大地测量，所以把这两台摄影机赠送给阿斯通（Aston）大学，用于卫星光学跟踪和轨道分析研究。1980 年其中一台又被搬到澳大利亚新南威尔士，另一台于 1982 年搬到格林尼治天文台。这两台摄影机现在仍然是国际上最精确的卫星摄影机，而且还在使用，已经记录了四千次以上的卫星通过。每次通过有 5～10 个观测值。

［苏］АФУ-75 摄影机：可跟踪卫星，类似于贝克-隆，焦距为740 mm，孔径 210mm，可拍摄到 10 等星。方向精度为 3″，记时用石英钟。这台摄影机相对较小，易于搬运。除了在苏联四个测站（包括普尔科伐天文台）上观测过以外，曾被运到捷、保、匈、蒙、古巴、埃及、索马里七国以及印度洋中某岛和南极地区等九个测站上观测过。

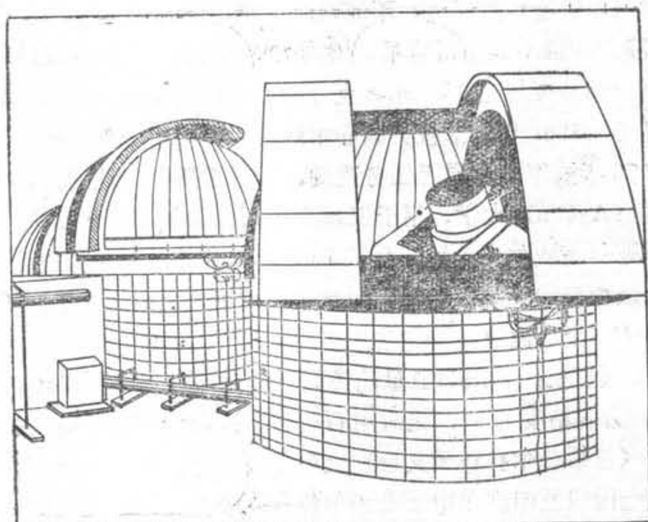
［瑞士］BC-4 摄影机：这是一种更轻便的摄影机，是由威特 T_4 经纬仪底座加上航空摄影机组成的，不跟踪，焦距有 450 mm 和 303 mm 两种，孔径都是 115 mm。它的视场特大，一种是 33°×33°，一种是 22°×22°，因此每次卫星通过时能留下 100～300 个断口，平均观测精度可大大提高，但仪器精度也只是 2″ 左右。这种摄影机在 1967～1971 年建立全球卫星方向网测量中以它为主起过很大作用，起初采用了 11 台 BC-4 摄影机，（其中 7 台焦距为 303 mm，4 台为 450 mm），后来增加到 16 台，先后跟踪回声 1 号及 2 号卫星，所以这个网有时称为 BC-4网。这个网经全球平差以后，每站坐标中误差为4.1m。

八十年代用于卫星方向观测的最新的“照相机”，是一种安置在地面的电子光学深空监测系统（GEODSS），这是由美国空军研制的，1982 年开始使用，全球设五个站，分别位于新墨西哥、夏威夷、南朝鲜、大西洋东部和印度洋，每站设置三个望远镜（参见图



(a)

图 2-8



(b)
图 2-8

2-8(*b*))，其中两个孔径为1.02 m，视场2°，一个孔径为38 cm，视场6°，预期精度0.2″，所有在高度5000～36000 km范围内的卫星都能测到。

§2.4 距离测量

上节所述几何空间网也可由单测距离来确定，但至少必须四站同步观测。如图2-9，设由地面点T_1、T_2、T_3对卫星S_1同时测距，若地面这三点的相对位置已经测定，例如由地面三角网已知其相对坐标，则根据对S_1所测三个距离就可确定S_1的空间位置，即测定了卫星S_1在地面坐标系中的坐标。因为S_1必是以T_1、T_2、T_3为球心，以T_1S_1、T_2S_1、T_3S_1为半径的三个球的交点。如果照这样测定了S_1、S_2、S_3三个不同的卫星位置，而且地面未知点T_4也同时参与测距，便可把S_1、S_2、S_3三点作为已知点，再作三个球交出T_4的坐标。

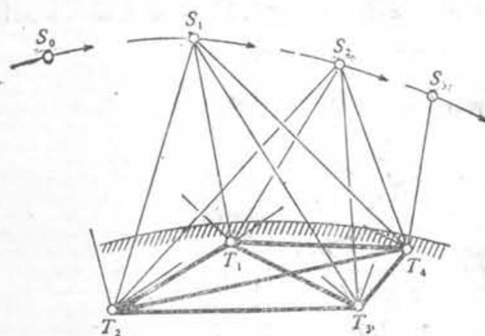


图 2-9

但是用这种方法要大面积布成网很困难，因为四站要实现同步而且要求图形好，很不容易，如果是测定少数未知点，例如联测海岛还能做到。

因此精密距离测量主要用于跟踪卫星和研究卫星轨道变化及其他地球动力现象。

距离测量曾用过多种方法，其中精度最高的是激光测距，八十年代测卫、测月主要用这种方法。

激光是一种非常窄而密的相干光束。在普通光的辐射中，光源的分子或原子所辐射的光是彼此独立的，光束的振动其相位关系各不相同，因而是不相干的。激光器是利用光谐振腔强迫谐振材料的原子作同相辐射，为了储存能量，不使粒子在达到高能级之前就产生激光作用，使用 Q 开关来快速变化谐振腔的 Q 值，当开关使 Q 值迅速增大时，原子激发到更高能级，引起受激辐射，产生巨大的光脉冲。激光测距仪就是测出脉冲从发射到返回的往返时间，乘以光速而求得二倍距离，因此它的主要组成部分应包括发射部分，接收部分，测时部分，还有跟踪瞄准卫星部分。

最早实行激光跟踪卫星是在六十年代末，用的是红宝石激光器，脉冲宽度约20ns（10^{-9}s），测距精度约为1m。七十年代由于换成钇铝石榴石激光器，并使用更窄的脉冲，加上记时精度的提高，使测距精度逐步提高，大多数可达精度约为10 cm，到了八十年代又提高到2～3 cm。

世界上首先发展激光跟踪技术的国家是美国，然后是法国、西德和苏联。七十年代期间美国的哥达德宇航中心和史密松天文台就已建立了不少跟踪站，取得了大量资料。

英国开始得比较晚，但是1982年在格林尼治天文台安装的一台激光仪却可以称得上是八十年代最好的激光跟踪设备（见参考文献[16]）。

这台激光仪（见图2-10）设计先进，激光器用的是波型同步钇铝石榴石系统，运行波长为530 nm（10^{-9}），脉宽约150 ps（10^{-12}s），每秒有10个脉冲，每个脉冲能量为30 m·j（毫焦）。激光脉冲经过一个孔径100 mm的折射光学系统发出，用一个孔径500 mm的反射望远镜接收返回的光子，测量往返时间的精度可达100 ps，用光速折算，相当于3 cm的距离精度。

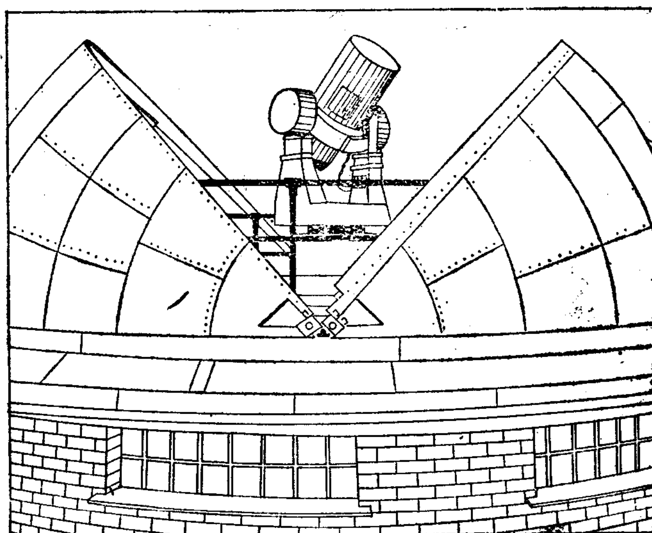


图 2-10

可供激光跟踪观测的卫星必须装有棱镜激光反射器，棱镜是用一个透明正立方体切去一角而成，入射激光束就射在这个切面上，经过两次内反射，严格改变射束方向180°，以保证射束沿原路返回。每个这样的卫星表面嵌满许多块棱镜，例如，1976年发射的LAGEOS卫星就嵌有426块。第一个装有反射器升空的卫星是1964年发射的探险者22号(BE－B)，接着是1965年发射的(现在还在用)探险者27号（BE－C)，1965～1981期间大约共发射了15个带反射器的卫星,但到1982年仅剩10个这样的卫星可供激光跟踪。

由于激光束发散角很小，一般为1～5m·rad。许多供激光跟踪的卫星体积都小，像LAGEOS仅是60 cm直径的圆球，又高达6000 km，所以要保证射中它，必须预先知道它的轨道位置，高空卫星由于大气阻力影响小，轨道比较容易测准，像上述卫星，要求这样的预报精度有把握做到，但低空卫星则很难测准，所以高度在500 km以下的卫星一般不能用于激光跟踪。

激光跟踪需要晴空条件，白天夜晚则不限，当然夜晚更方便些。

八十年代激光跟踪的精度可望达到2 cm，这个成果有很重要的意义，它可以帮助解决许多地球物理和大地测量研究课题，例如大陆漂移，大地水准面形状，地球自转及地极的变化，等等。

我国从1972年起开始研究激光测卫技术，并先后在三个天文台、一个人卫站、军事测绘学院和研究所共六个站上用自己研制的测距仪联合观测，测距精度为1～2 m。1983年，上海天文台用第二代测距仪参加了国际MERIT联测，资料经设在美国的数据分析中心处理，精度达15 cm左右。1985年，武汉地震研究所研制的第二代测距仪观测LAGEOS卫星也获得成功。近几年，我国上海、长春、北京、武汉等地有关单位都在努力研制第三代激光测距仪，希望能将测距精度提高到10 cm左右。

§2.5 距离差测量

距离差测量包括测定同一测站到两个不同的卫星位置的距离之差，以及同一卫星（或信号源）位置到两个不同测站的距离之差。前者是利用多普勒效应原理测定频移，后者是测定同一信号到达不同测站的时间延迟。

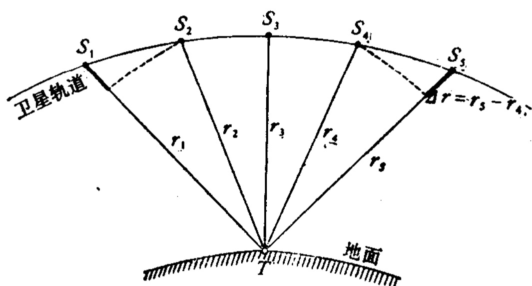


图 2-11

一、多普勒测频法

设如图2-11，地面测站T对卫星观测，接收卫星发射的连续的电磁波信号，由于卫星相对于测站的运动，会因多普勒效应而使接收到的信号频率不同于发射的频率，即产生多普勒频移。在这里起作用的是卫星到测站的径向相对速度，即$\dfrac{dr}{dt}=v$，式中r是卫

星到测站的距离，设卫星发射的信号频率为 f，测站接收到的频率为 f'，假定卫星上的时钟与测站接收机的时钟严格同步，卫星在一秒钟开始时发射 f 个波，这些波沿卫星到测站联线的方向传播。由于卫星相对于测站的径向速度为 v（设为正值，即远离测站，如图 2-11 中 S_4、S_5），传播路程每秒加长了 v，成为 $c+v$，因此当一秒钟结束时测站接收到的信号波长 λ' 变为 $\lambda'=(v+c)/f$，但测站时钟指示的是刚过一秒钟，电磁波传播的路程应是一秒钟的光速 c，所以接收到的信号频率应为 $f'=\frac{c}{\lambda'}$，产生的多普勒频移为

$$\Delta f=f'-f=-\frac{f}{c}v=-\frac{f}{c}\cdot\frac{dr}{dt} \tag{2-6}$$

这是指卫星渐远于测站的情形，即接收频率变小，反之，若卫星渐近于测站（如图 2-9 中的 S_1，S_2 位置），则 f' 增大，当卫星到达 S_3 位置，此时离测站最近，径向相对速度为零，$f'=f$。

由（2-5）式可知，多普勒频移与卫星对测站的相对径向速度（即距离导数）成比例，如果等时间间隔地算出 S_1 与 S_2，S_2 与 S_3……之间的平均频移量，就能求出相应的 $\frac{dr}{dt}$ 平均值，再乘以这个时间间隔 dt，就可求得相应的距离差 r_2-r_1，r_3-r_2，……。

根据几何学上关于双曲线的定义，如果以相邻的两个卫星位置为双曲线焦点，则每一距离差可作出一对双曲线，测站必在此双曲线的左枝或右枝上，若取三个距离差作出的双曲线则必能交出测站位置。

实际上，每对双曲线在空间是形成一对旋转双曲面，图 2-12 画出其左叶。

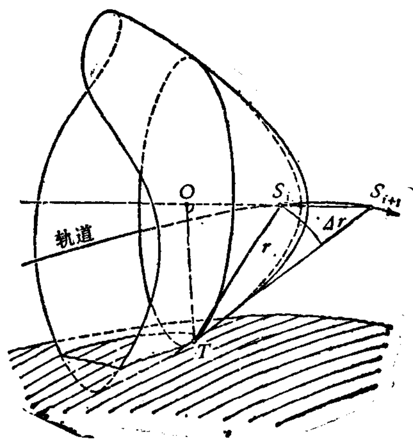


图 2-12

多普勒频移法不仅可测出距离差，还可测出卫星最接近测站的距离（如图 2-11 中的 r_3）和时间，以及卫星绕地球运转的周期。如果在地球表面多个已知测站上观测卫星，测得的频率变化足够精确，就可用于推算卫星轨道，知道轨道根数及卫星位置，便可如上所述来计算未知测站位置。由于在一个测站上频率变化不大，例如，对于100 MHz的卫星信号，频率变化小于 10 kHz，所以卫星发射的频率必须很稳定，否则接收到的信号频移就会有虚假的变化。此外，为了尽量减弱电离层对电磁波的折射影响，常用两个频率发送信号，例如150MHz和 400 MHz，一般这种误差与频率成反比，故可通过比较不同结果来估算误差并加以消除。

多普勒测频法可以单站测量也可多站同步联测，因此既可解决几何定位问题，又可解决测定轨道等动力学问题。目前正在运行的子午卫星星群主要提供这种测法（详见第六章）。每个星可超前预报它所在轨道数据，并随时广播它的位置。凡有相应接收机的测站，

在卫星经过上空时都能接收到信号。由于接收电磁波不受天气阴晴影响，所以是大地测量上广泛使用的方法。

二、干涉测量法

对于测量线性量来说，最精确的莫过于干涉方法。同一信号源发出的同一频率电磁波到达不同接收天线，若产生波程差便会形成干涉。当波程差恰等于半波长偶数倍时信号加强，等于奇数倍时信号减弱或抵消。前者同相，后者异相，因此可以测量同一波前经过波程差的时间延迟，也可测量相位差变化的周数。测时间延迟可精确测定两接收站天线之间的长度，测相位变化可测定卫星的方向，但方向测定精度仅 1′～2′ 左右，用途有限。测量时间延迟方法是来源于天文学中的射电干涉测量原理，七十年代末大地测量开始研究以人造卫星为信号源，利用这个原理来解决高精度要求的大地测量问题。以下先讲述射电干涉测量原理。

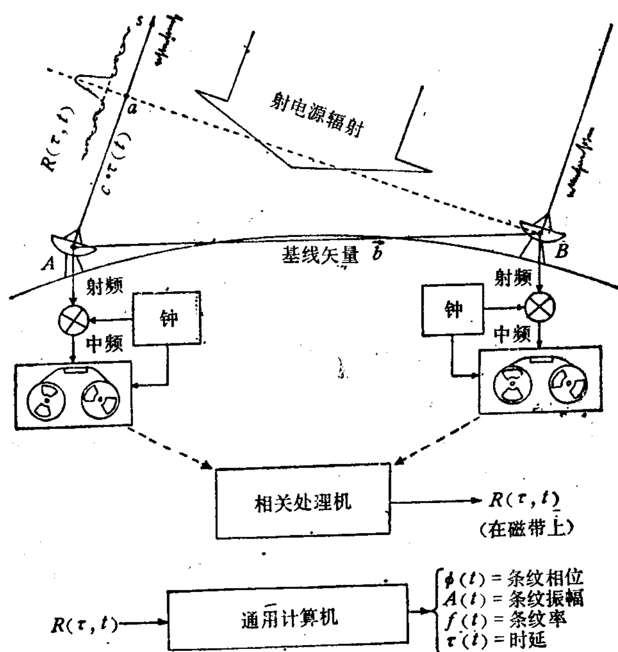


图 2-13

如图 2-13，地面 A、B 两测站接收来自某一信号源的电磁波，电磁波同一波前必将先到达 B 站，后到达 A 站，因产生了程差，故可形成干涉。但必须在时间精确同步的条件下才能进行干涉比对。这在早先是采用联线干涉测量，即用电缆将两站联结起来用微波传输信号到一站进行比对。这样两站的距离就不可能很长，因而精度不高。六十年代末（1967～1969），由于有了原子钟等能精确同步的时钟，才使这项技术前进了一大步，改为可以独站分别测量，将信号记录下来，然后一起送到处理机上进行干涉处理。这样，基线就可以放长，甚至等于地球直径，比联线干涉测量的基线增长近百倍，因而精度可以提高两个数量级，对于测定两站间几百公里长的基线而言，能达到厘米级精度，而对测定射电源的空间位置，则可望达到 0.001″ 的精度。这样好的结果可以有广泛的应用，例如：

测量地极移动及地球自转速率的短周期变化，地球固体潮各周期的振幅和相位 以及洛夫数，大地板块运动的相对速率和方向，等等。

由天线接收到的射频是以千兆赫计的高频信号，经过接收机接收并变换为中频（视频）信号记录在磁带上，然后将两站所接收的信号一起输入处理机进行干涉比对，即可得到表示干涉情况的相关函数 $R(\tau, t)$，再用它作为计算机的输入量，结果可得到 $\phi(t)$，$A(t)$，$f(t)$，$\tau(t)$ 等函数。其中 $\phi(t)$ 是干涉相位函数，一般在短基线干涉测量使用相位跟踪法时才用得到；$A(t)$ 是干涉振幅函数，它表示干涉条质量，对于研究射电源结构很有用，而在大地测量中用不着；大地测量中最需要的是 $\tau(t)$ 和 $f(t)$，即时间延迟和延迟率。

如果将图 2-13 简化为图 2-14，图中用 $-\vec{S}$ 表示射电源方向单位矢量，负号表示与射来的方向相反，波程差 aA 用 $c\tau$ 表示，c 是电磁波速度，τ 为运行 aA 距离的时间，一般称为几何时间延迟，由图可得

$$c\tau = |b|\cos\theta = -(\vec{S}\cdot\vec{b})$$

或

$$\tau = -\frac{1}{c}(\vec{S}\cdot\vec{b}) \tag{2-6}$$

考虑到地球自转，即使在很短时间内也会使 $c\tau$ 变化（参见图 2-15）。例如电 波到达 a，即 τ 开始时，波程差为 $c\tau_1$，但到 τ 结束时，因地球自转，变为 $c\tau_2$，由于 c 是常数，所以实质上是时间延迟 τ 在变化，一般把这种变化率称为时间延迟率。

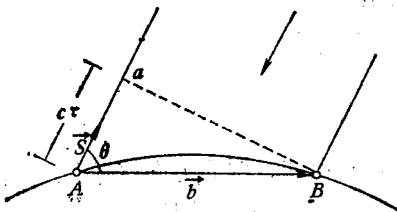


图 2-14

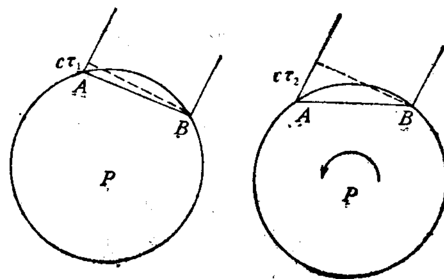


图 2-15

设在图 2-16 的坐标系中，X 轴指向春分点，不随地球自转而变，X' 轴表示与格林尼治子午面重合，随地球自转而变。

在春分点坐标系（XYZ）中：

$$\vec{b} = b[\cos\delta_b\cos\alpha_b\,\vec{i}_X + \cos\delta_b\sin\alpha_b\,\vec{i}_Y + \sin\delta_b\,\vec{i}_Z]$$

$$\vec{S} = [\cos\delta_S\cos\alpha_S\,\vec{i}_X + \cos\delta_S\sin\alpha_S\,\vec{i}_Y + \sin\delta_S\,\vec{i}_Z]$$

则

$$\tau = -\frac{b}{c}[\cos\delta_b\cos\delta_S\cos(\alpha_S-\alpha_b) + \sin\delta_b\sin\delta_S] \tag{2-7}$$

但在地球形坐标系（$X'Y'Z'$）中：

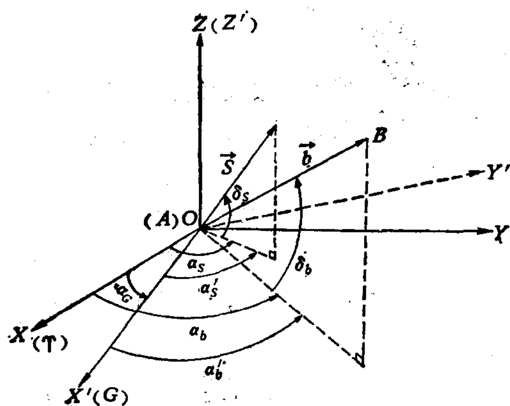


图 2-16

$$\vec{b}=x'_b\cdot\vec{i}_{X'}+y'_b\cdot\vec{i}_{Y'}+z'_b\cdot\vec{i}_{Z'}$$

$$\vec{S}=\cos\delta_S\left[\cos(\alpha_S-\alpha_G)\cdot\vec{i}_{X'}+\sin(\alpha_S-\alpha_G)\cdot\vec{i}_{Y'}\right]+\sin\delta_S\cdot\vec{i}_{Z'}$$

$$\tau=-\frac{1}{c}\left[\cos\delta_s\cos\alpha'_s\cdot x'_b+\cos\delta_s\sin\alpha'_s\cdot y'_b+\sin\delta_s\cdot z'_b\right] \tag{2-8}$$

地球以角速度$\omega(=7.292116\times10^{-5})$自转，在$\tau$时间内，将转过$\omega\tau$角度，也就是使$\alpha_G$变化$d\alpha_G=\omega\tau$,或$d\alpha'_s=\omega\tau$,因此可由（2-8）对$\alpha'_s$求偏微商，即

$$\frac{\partial\tau}{\partial\alpha'_s}=\frac{1}{c}\cos\delta_s(\sin\alpha'_s\cdot x'_b-\cos\alpha'_s\cdot y'_b)$$

或

$$c\cdot\partial\tau=\omega\tau\cdot\cos\delta_s(\sin\alpha'_s\cdot x'_b-\cos\alpha'_s\cdot y'_b) \tag{2-9}$$

考虑到观测值的偶然误差v，并加入诸仪器改正项，可得

$$c\cdot(\tau+\partial\tau)+v=-(\vec{b}\cdot\vec{S})$$

即

$$\begin{aligned}&c\tau+\omega\tau\cos\delta_s(x'_b\sin\alpha'_s-y'_b\cos\alpha'_s)+v\\&=-\cos\delta_s\cos\alpha'_s\cdot x'_b-\cos\delta_s\sin\alpha'_s\cdot y'_b\\&\quad-\sin\delta_s\cdot z'_b+\text{改正项}\end{aligned} \tag{2-10}$$

这就是观测方程式。

其中，观测量是τ，ω已知，c(=299792.458 km/s)已知，源的方向（球面坐标）可以已知也可作为未知数一并求解，基线两端的坐标差x'_b、y'_b、z'_b就是大地测量需要求得的未知数，改正项作为系统误差可另外测得。于是在有多于未知数个数的观测值的情况下（一般若观测n个源，则有$3+2\cdot n$个未知数），即可平差求解。

仪器改正项可包括钟差、钟速、仪器迟滞、大气层（电离层，对流层）改正，光行差以及天线相位中心与几何中心不一致等的改正。为了减弱大气改正，一般不测高度$h<20°$的射电源。另外，若天线口径不大，则应选测强源，例如致密源$3C_{273}$、$3C_{84}$等。

这种精确测定地面基线的干涉测量方法，按基线长短常称为长基线干涉（LBI）或甚长基线干涉（VLBI）测量。决定成果精度的关键是仪器设备，一是天线，二是钟，三是接收机。因为来自射电源的信号非常微弱，即使不大的外界自然干扰因素及仪器本身的噪声和不稳定，都将有很大影响。因此对仪器设备必须有严格的技术要求。例如对天线，口径要足够大，其焦距F与直径D之比，应为$F/D\approx0.35$，还要转动灵敏稳定，有一定的刚性，在气温低下时应有加罩去冰设备，噪声温度应$\leq60°$K；对于钟，要求短期稳定

度为10^{-13}～10^{-14}（或0.5×10^{-14}），因而必须采用氢原子钟；对于接收机，要求灵敏度高而噪声极低，因此一般采用致冷参量放大器，将来可望采用量子放大器。目前美国制造的最好接收机，包括天线等设备在内，其等价噪声为26° K（一般为100° K）。此外，若能扩大接收机频带宽度，还可减小天线口径，而不降低观测精度。

在全部设备中，天线是最为笨重的部分，也因此而不利于广泛应用。近十年来已可逐渐将几十米（例如64 m，45 m）的天线缩小为几米（例如9 m， 4 m），使基线干涉测量可以流动进行，而这正是大地测量所需要的。

对大地测量来说，希望成本低，精度高，使用方便。所以近几年前美、加、日、西德等国，已进一步研究用GPS卫星作为信号源，由它发射信号要比河外源信号强10万倍，从而对接收装备的要求可大为降低，可以用小口径天线和稳定度为10^{-9}的石英钟，接收机也可用一般要求的放大器，而且仪器可做得很小，体积约为0.1 m^3，重量15 kg左右，在少数固定站可装备大天线，将卫星与河外类星体联测。当然，由于卫星离地球较近，到两站的信号射束不平行，要加以改正。

应用于大地测量的干涉测量详细方案可参阅文献[29]，基线干涉测量在测量长度方面的精度，试验结果约为：

几千公里　　±10～50 cm

几百公里　　±3～5 cm

几公里　　±0.3～0.5 cm

美国在七十年代末曾用东部及西部几个射电天文台彼此联测的基线干涉测量长度结果，与这些台上长期进行的卫星多普勒定位（用精密星历、单点定位）推算的结果作了比较，两者基本符合。表2-1是比较的结果：

表 2-1

基　　线	长　　度 (km)	*VLBI*-多普勒 (cm)
*A*台～*B*台	3900	−23
A　～*C*	3929	+7
A　～*D*	864	+17
D　～*C*	3325	+46

详细分析可见参考文献［28］。

§2.6　卫星测高

卫星测高方法是利用卫星携带的测高仪从高空向地面垂直发射电磁波短脉冲，并记录脉冲从地球表面反射回来往返的时间，便可求得卫星到地面的垂直距离。卫星测高大多数用于测海面，也可用于测平坦地面。

由于脉冲射束发散，在海面形成一个圆面积区，如图2-17，圆心是卫星星下点，圆直径的大小随卫星高度及脉冲能量和脉宽而有不同，测出的垂直距离应是卫星到星下点的距离，但是在这块圆面积区内都有海面反射后的回波，要分辨出到星下点的垂直距离，取决于测高仪的分辨力高低，分辨力越高测得的距离越能代表是垂直距离，因而精度越高，通常对一个海区还要纵横飞越许多条测线，形成重迭，以反映海面实际情况，提高精度。

图 2-17 表示卫星在进行一条测线上测高的情况，在测高的同时，地面已知站也跟踪卫星，用多普勒法或用激光测距法，以便测定卫星轨道，测定轨道与卫星测高可能不在同时，但可推算出测高时刻卫星的位置，即已知其地心位置矢量$\vec{r}_{s_i}$。

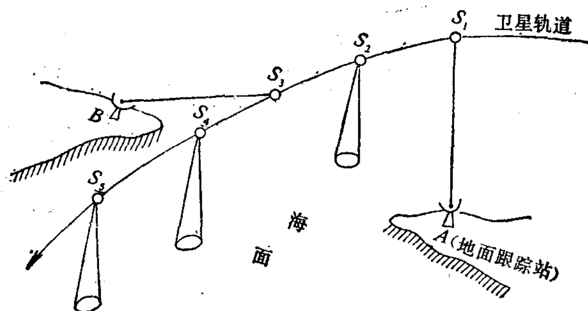
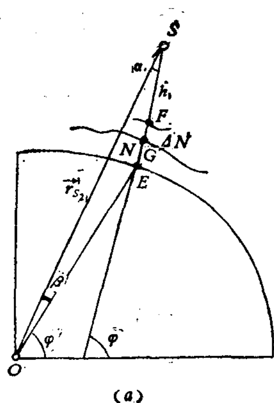


图 2-17



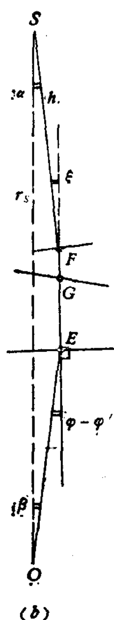


图 2-18

图 2-18 表示设在 t_2 时刻，已知$\vec{r}_{s_2}$并测得高度 h，来分析各几何量的关系。卫星下点F是地球表面的一点，作此点的子午面。将 (a) 图 t_2 时刻各量表示在这个子午面上，如 (b) 图。F点所在的是瞬时海面，G点所在的是相应的大地水准面，E点所在的是与地面跟踪站所属的同一个椭球的椭球面，若不考虑垂线弯曲，则SF是垂线，FE是法线，垂线偏差的子午分量为ξ。设E点的大地纬度是φ，地心纬度是φ'，φ'等于卫星此时地心纬度减去β。再设瞬时海面已经改正为平均海面，则$FG=\Delta N$是海面地形改正，$GE=N$是大地水准面相对于椭球面的高度，EO是E点到椭球中心的长度，可以根据椭球几何关系算出。$SF=h$，是测得值。如果不计$\varphi-\varphi'$及ξ的影响，则有

$$OS=r_{s_2}=h+\Delta N+N+EO \qquad (2—11)$$

式中r_s是卫星在此时刻地心矢径的长度，也已知，因此$\Delta N+N$就可算出。如果再略去1～2 m的海面地形改正ΔN，或粗略改正（参见图 1-9)，则可求得大地水准面高度N，这就是卫

星测高法的直接成果。

由图 2-18 可知，

$$\left.\begin{aligned} OS &\approx OE\cos\beta + SF\cos\alpha + (\Delta N + N) \\ \alpha + \beta &= \xi + \varphi - \varphi' \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}12)$$

如果椭球扁率 $f = 1:298.25$，则可求得

$$\varphi - \varphi' \approx 694'' \sin 2\varphi$$

可见其最大不过 12′，ξ 更小，因此可有以下关系式：

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta &= \xi + (\varphi - \varphi') \\ \alpha/\beta &= OE/SF \end{aligned}\right\} \quad (2\text{-}13)$$

于是 α、β 可计算出来，以便对（2-11）式加以改正。此外，大气折射改正如需要也应考虑，估计对流层改正小于 5 cm，电离层改正小于 1 cm。

卫星测高法的试验观测从 1973 年到 1979 年期间进行过三次，分别利用三个不同的卫星：天空实验室 SKYLAB，测地卫星GEOS-3，海洋卫星SEASAT。三个卫星的有关数据见表 2-2。所以测高精度可认为分别是 1.0 m，0.6 m，0.1 m。SKYLAB 已于 1979

表 2-2

	SKYLAB	*GEOS*-3	*SEASAT*
卫星平均高度(km)	434	850	725
海面圆面积直径(km)	2.3	3.6	1.6
分辨率(m)	1.0	0.6	0.1

年降落回地面时烧毁。SEASAT 于 1978 年发射。进行了三个月测高工作。取得了前所未有的测高精度（10 cm），后来仪器失效，现已无法测高了。GEOS-3 测高工作也已停止，所以八十年代的卫星测高要由新的海洋卫星系统（NOSS）代替。

卫星测高法也可用于测量陆地地形，得出卫星下点测线上的地形纵断面，这项试验已在美国试验过（见参考文献[10]），利用 GEOS-3 测得了从大西洋向西北飞经华盛顿再经北美五大湖区的地形纵断面，所经平坦地区数据相当准确，但地形变化大的地区还难以得到好的成果。

卫星测高数据对于推算海洋区域重力异常有重要作用，它相当于在海上进行了大量重力测量。因为按斯托克司积分求大地水准面高度N时，需要知道重力异常。现在卫星测出了N，便可反求重力异常，这对于研究全球重力场是很重要的补充。

卫星测高法与海洋科学研究更有直接关系，它可以收集到许多有关海洋状态的信息，例如各类洋流的宽度、边界位置、洋流速度和方向，等等。

按照已达到的测高精度对测定海面瞬时变化就已有很大作用。例如，若在海面 10 km 范围内测高分辨力达 0.1～0.2 m，就能测定振幅小于 1 m 的远洋潮汐起伏。

§2.7 卫星对卫星跟踪测量

卫星对卫星跟踪测量，是指一对卫星中的一个卫星对另一个卫星跟踪测量两星之间的距离，或距离变化率，可用多普勒法也可用激光测距法。

两个卫星可以有两种配置方法。即，高-低法和低-低法。高或低是指卫星的轨道离地面高度而言。低轨卫星的高度一般不小于 150 km，过低则寿命不长，高轨卫星的高度可以高到几万公里。地球同步通讯卫星、应用技术卫星（ATS）、测时测距导航星（NAV-STAR）等都可用作高轨卫星。一个地面测站观测低轨卫星只有 10 分钟左右时间可测，相当于只能看到该卫星轨道的 10% 弧段，因此要测定轨道就需要在地面设相当多的测站，各测不同的弧段，如果用一个同步卫星取代地面站，这个测站在 36000 km 高处可以看到卫星轨道 50% 的弧段，因而不需很多地面站。现在美国的跟踪及数据中继系统(TDRSS)就有两个这样的卫星固定在 $\lambda=41°$ W 及 $\lambda=171°$ W 高空，从 1983 年起用来跟踪所有 NASA（美国国家航空航天局）卫星。

由于卫星在不均匀引力场中运动会使它的轨道运动速度、加速度产生异常，反映这种异常的几何数据测量得越精确，轨道测定也就越精确，因而也就越能了解引力场的细貌，或者说求得的重力异常精度越高。但是离地球远的高轨卫星对重力异常的反映不如近的低轨卫星灵敏，而低轨卫星的轨道又不如高轨卫星的轨道容易测准。我们从图 1-3 可以看到，如果用球谐函数来拟合地球引力场等位面，则高轨卫星轨道主要取决于低阶球谐项，因为高阶项随卫星高度的增大而迅速衰减，所以高-低法跟踪是由地面已知主跟踪站测定高轨卫星轨道，而由高轨卫星跟踪一个低轨卫星，以便能对地球引力场有较大的分辨力。但是轨道越低大气阻力对卫星运动的干扰越大，这就要求低轨卫星应该小而重，或者使用一种无阻卫星。无阻卫星可以是双层结构，即在卫星外包一层同心球壳，卫星悬浮在球壳内，球壳用作反馈圈（参见图 2-32）。这种无阻卫星可记录并抵消大气阻力及太阳辐射压力，以取得引力场的较为可靠的信息。

当低轨卫星运动到高轨卫星星下点方向附近时，两星相对径向速度的变化，即相对距离变化率就主要与引力场高阶球谐项有关，因此测出两星间距离及其变化率就能推算重力异常。

由于现在对卫星的速度可以测到每秒几毫米的精度，因此地球引力场的不大的异常都可由卫星的加速度异常而发现。例如由 ATS-6 高空卫星跟踪的联盟—阿波罗号宇宙飞船经过喜马拉雅山区时，就测出了罕见的加速度异常。

如果跟踪观测仅是单方向传输信号，则称为单通道跟踪。如图 2-19 (*a*)，表示仅由高轨卫星主动发射信号，供低轨卫星及地面用户测站接收，用以测定低轨卫星的位置、速度及时间，从而求出它的轨道。高轨卫星上装有发射接收设备及高精度时钟，而低轨卫星不需发射设备，只有接收设备。但是由于星载时钟的频率漂移以及设备的系统误差，影响距离变率的测定精度，为了尽可能抵消上述误差影响，又采取对向传输信号的办法，即在卫星与卫星之间，卫星与地面站之间进行双通道跟踪，参见图（2-19（*b*）和图 2-20）。

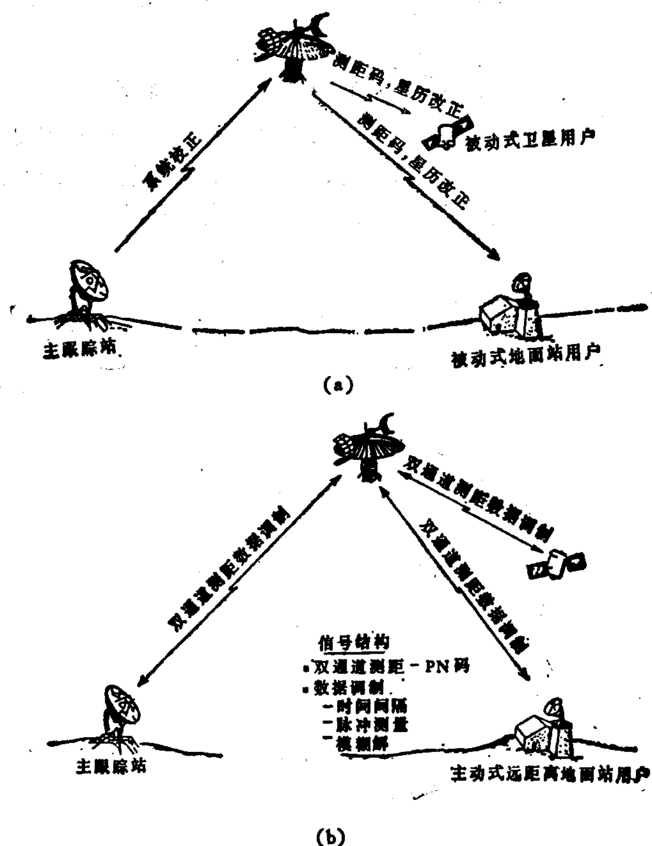


图 2-19

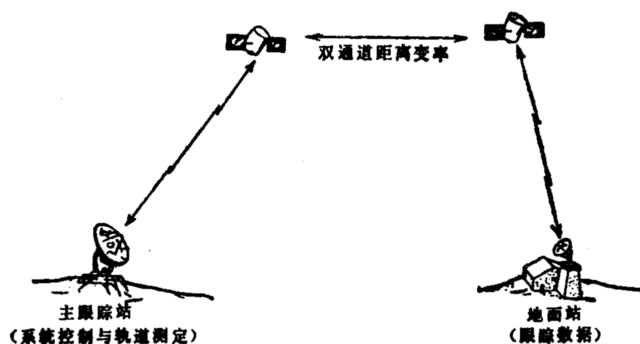


图 2-20

图 2-20 表示的是低-低法双通道跟踪，两个卫星的轨道近于圆，半径几乎相同，因而运动速度及周期也几乎相同，只是一前一后。这样，相对距离变化率是个较小的量，就有

可能以相当高的精度测定，已有研究报告表明，精度可达 10^{-4} mm·s^{-1}。

卫-卫跟踪法是八十年代卫星大地测量的一项新的技术内容，七十年代末才开始研制试验，当时是由两个因素促成的，一是为了满足精确测定阿波罗这类宇宙飞行器轨道的需要，二是为了全球数据通讯采用中继卫星，天线定向和遥测遥控的需要。因为在此之前卫星都是由地面跟踪站跟踪观测。但是如前所述每一地面站只能测到地平以上一段轨道弧，低轨卫星弧段更小，要想在全球地面布设许多跟踪站由于种种原因又难以实现。卫-卫跟踪法的低轨卫星对于通讯来说是中继卫星，对于大地测量来说则是重力场卫星。不过，从精度要求来讲，大地测量上的精度要求更高。

卫-卫跟踪已经进行过的试验，都是以应用技术卫星 ATS-6 为高卫星，低卫星有阿波罗-联盟号、气象卫星云雨 5 号以及测地卫星 GEOS-3。从 ATS-6/GEOS-3 的结果得知，用多普勒法测定距离变率的精度已达 0.2 mm·s^{-1}，由此估计，已可算出 $5°\times5°$ 方块的平均重力异常。为了能估算出更小方块（$1°\times1°$，$2°\times2°$）的平均重力异常，使精度达到 1 mGal，正在研制一种专用的重力卫星（GRAVSAT），将其送入 200 km 左右的轨道，并使距离变率的测定精度提高一个量级。这样，低-低跟踪法就会更受重视。

卫星测高法和卫-卫跟踪法都能测定重力异常。但相比而言，卫-卫跟踪法比测高法更为有利之处是它不受海面变化的影响，也不受陆地地形变化大的影响，可以全球复盖。此外，卫-卫跟踪法还有一些潜在的能力。例如上述低-低法中，两个低卫星若相距很近，可以看做是一个长链式重力梯度仪，两星间距离变率与链的张力成正比，因而可测量重力梯度。由于重力梯度对重力场细部变化更为敏感，这样就可使重力位展开式扩展到更高阶项。

§2.8 适用的卫星

根据美国 1984 年统计，自 1957 年以来，全球已发射各类人造天体 14000 多个。其中 2/3 或陨毁或回收或逸去。到 1983 年只剩下 4914 个。而且 80%是发射卫星用过的火箭或残体（导弹前锥及燃料容器）或卫星碎片。还能用于科学研究的沿轨道运行的人造天体仅存 290 个左右。其中有 180 个是美国发射的，100 个是苏联发射的，其余则分别为日本、加拿大、印尼、印度、中国和英、法等13个欧洲国家所发射。

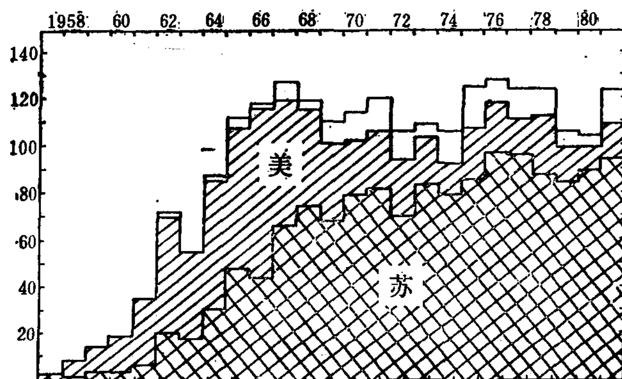


图 2-21

图 2-21 表示 1957～1981 年期间各年发射的用于民间科学研究的卫星总数。图左标有数量，图上端标有年份，图中阶梯形折线表示各年总数及变化情况。各年总数是三部分累计数，即苏联发射数加美国发射数再加其他国家发射数。这第三部分有的是用本国制造的火箭发射的，如法国

(1965)、日本(1970)、中国(1970)、英国(1971)、印度(1980),有的则是利用外国火箭发射的。

如果将发射上天的这么多人造天体大致划分，约有$\frac{6}{10}$。是为了军用，$\frac{4}{10}$是民用，但是苏、美两国军用的比例还要大得多。军用卫星中有半数以上是摄影侦察卫星，有10%是通讯卫星，10%是导航卫星，其余不到30%用于其他各种用途，例如用于导弹发射，海洋监视，电子监听、卫星拦截等等。

民用的$\frac{4}{10}$中，有40%是用于科学研究试验，大多数是观察地球及其周围空间环境，其余是研究行星、太阳、月球；还有40%是通讯卫星，10%是气象卫星，10%是载人飞船。

我国于1970年4月发射第一个人造地球卫星，$i=68.5°$；1981年9月首次用一支火箭发射了三个空间物理探测卫星；1984年4月一次成功地发射了一个实验通讯卫星，定点于东经120°赤道上空，通讯及广播电视传输都很正常，这标志着我国空间技术已达到相当高的水平，成为世界上少数几个能够完全独立研制并发射地球同步卫星的国家之一。

各种人造天体形状不一，轻重不一，大的平均直径有达30～40m的，如气球型卫星回声(Echo)一号、二号和帕吉奥斯(Pagcos)，小的仅16cm，如美国的第一个卫星先锋(Vanguard)一号，这个卫星也是最轻的，仅1.5kg，而重的有达16t。如苏联研究宇宙线所发的质子(пPOTOH)一号，至于航天飞机那就更重，如欧洲空间局(ESA)的轨道飞行器运行重量可达68t，而前述SKYLAB卫星则重达75t。

通常一个人造天体可携带多种仪器设备，供多种目的研究使用，因此卫星分类只能是按大学科分类。从大范围分，环绕地球运动的可称人造地球卫星，飞向地球以外研究其他自然天体的可称为空间探测器。六十年代末苏美发射的登月空间探测器(ЛУНА-XVI, Surveyor-1)已能先后在月球软着陆。在此之前又先后为了研究近地球的金星、火星多次发射过空间探测器，其中以美国探测火星的水手4号(Mariner-4)和6号、苏联探测金星的金星4号(BEHEPA-4)和5号获得的资料最为丰富。1977年美国又分别发射旅行者(TRAVELER)一号和二号，飞向木星、土星、天王星，并于1980年11月、1981年8月两星先后经过木星飞临土星，取得宝贵资料。1982年2月美国宣布，新发现了土星的6个卫星，这样土星就有了23个卫星，预计旅行者二号于1986年和1989年先后飞临天王星和海王星。

但是，对于人类更有现实意义的是研究和探测地球本身，了解地球的几何形状、物理特性，生态、资源分布以及种种变化，包括是胀还是缩，是变冷还是变热等等内外因素。总之，是要研究如何利用空间技术为人类生产、生活的发展提供服务的问题。

就研究地球本身来说，按自然科学学科划分，可分为气象卫星、海洋卫星、地球物理卫星、大地测量卫星、通讯卫星、导航卫星等等。若再细分的话，又可分为重力卫星、陆地卫星(遥感卫星)等等，但是总起来说，这些卫星都是起着一种信息传感或中继的作用，都共同有一些需要解决的问题，即：测定卫星轨道，测定地球重力场，以及如何更有效地

传输信息。因此，这些卫星的任务互有联系，彼此需要密切配合，而大地测量学科在解决这些问题中起着重要作用。所谓大地测量卫星，实际上并不单纯为了收集大地测量本身所需要的数据，它的设备是综合其他学科的需要而装备的。其他卫星也同样如此。这样，凡是有适用设备的卫星都可用于大地测量。

六十年代前、中期，为了满足光学观测的需要，发射过几个很大很薄的气球型卫星，表面镀铝，内部充气胀开，回声号卫星的平均高度约1000km。Pageoc 平均有4000km，都是反射太阳光供地面观测，前两个亮度相当于一等星，后者相当于2～5等星。这种大而轻的卫星，宜作为高空光学觇标，但用来收集重力场的资料，受到一定限制，因为轨道受大气阻力及太阳辐射压力的强烈干扰，很不稳定，但是对于同步光学几何观测来说，它对地面摄影观测仪器无过高的要求，这是优点。

从大地测量的任务全面考虑，要求卫星小而重，以适宜于动力学方法的研究，轨道不宜过高，过高对引力场异常的反应太小，除非有特种目的，一般不高于1500km。六十年代后期和七十年代美国发射了好些个这样的卫星，象前述的GEOS-1号，2号，3号，以及SEASAT等都是。观测卫星传输信息的设备也主要利用电磁波，其中以多普勒法和激光测距法为主。1976年发射的激光地球动力卫星LAGEOS（球形，直径60cm，重411kg，表面有426块棱镜）轨道虽高达近6000km，但任务不同，它可以发现地球的某些长期变化，例如地球形状的长期变化见参考文献［20］。1983。该文用5年半对LAGEOS的激光测距资料，分析得出地球引力场带球谐系数J_2的变化，每年为-3×10^{-11}，这表示地球的形状即扁率以这个量长期变化。这个成果是在美国德州大学做出的，受到学术界重视，加州大学著名教授考拉（Kaula）曾为此著文论述。

一个用于大地测量的卫星（其他卫星也类似），除了要考虑它的大小、重量、高度、传输信息的设备等因素外，还要考虑它运动所经的空间有不同于地面的特殊性，而采取相应措施。卫星运动的空间一般近于真空，近于无重力，温度变化大且辐射极高，还会受到流星撞击，因此要有防护措施。此外，对于体积较大而形状不规则的卫星，地球引力对其质心和对其各部分的作用不同，加上空间其他引力作用，使卫星在轨道上的姿态不能稳定，倾侧翻滚幅度很大，因此要有姿态控制措施，以便使卫星能按希望的方向（面对地球或其他卫星）定向。通常有以下几种方法：一种是利用梯度作用，将卫星用一根长链加长，链的另一端加一个小质量，这样在重力梯度作用下，链杆始终保持在重力梯度方向，从而使星体面对地球，上述的吉奥斯（GEOS）卫星就是用这种方法；第二种办法是自转稳定，即让卫星以一定的速度绕设计好的自转轴自转，这是利用陀螺的原理，因为高速旋转的陀螺若无外力冲击，它的自转轴方向保持不变，1967年法国发射的王冠（DIADEM-E-1和2）号卫星就是用这个稳定办法；第三种是喷气稳定，即由卫星内的喷气发动机经简单的火箭系统多方向喷出高速气流产生转动力矩使卫星定向，这个办法用得不多；第四种是磁力稳定，这是利用地磁磁场对卫星上设计的载流导线作用而产生偏转力矩，用这个力矩使姿态稳定。1962年由美国三军及国家航空航天局联合发射的安娜（ANNA-1B）卫星（高度约1000km）就是用这种办法，不过使用这种办法的卫星不能太高，否则地磁场太弱，精度不高。

以上这些办法各有优缺点或受一定的限制，所以有的卫星常常几种办法并用，以提高精度。但即使如此，也只能达到几分的精度。要达到几秒的精度，还得用观测恒星定向的办法。恒星定向的原理比较简单，好比地面点测定了纬度就可定出自转轴方向一样，若在卫星的计算机中存储若干恒星的坐标，根据卫星和地球的相对运动，可以算出各时刻恒星在卫星坐标系中的方向，然后在卫星运行中随时测量相应恒星的方向，加以比较，即可知道卫星定向是否变化，并随时调整。这种办法精度很高，但仪器复杂昂贵，难以普遍使用。

卫星除了有姿态控制及调整能力以外，还要有轨道控制及调整能力，即按地面指令利用卫星上备有的动力系统调整自己到指定位置。例如§2.6中提到过的ATS-6卫星，曾为完成卫-卫跟踪试验位于太平洋上空，以后为完成其他试验，先后被指令调整到印度洋上空和大西洋上空。又如在第六章将要叙述的子午卫星群，由于各卫星轨道有变化，常会形成分布不匀，有些星挤在一起的情况，需要调整，1981年5月就曾令其中的30110卫星改变过位置。

一个卫星的功能性设备主要有电源部分，跟踪遥感及数据处理部分，各类传感设备部分。

电源部分主要是利用太阳能，用几片由半导体组成的翼形集能板，可将太阳能转换为电能储存在镍镉电池中。电源要能保证各部件用电高峰时所要求的电压和电流。

跟踪遥测部分应有双向无线电通讯系统，通过多普勒信标或应答器保持与地面控制站的联系，包括将卫星测出的地面信息数据，卫星自身的工作状态，以及设备的各种参数传输给地面站，并接受指令完成指定动作。卫星上的计算机同时进行必需的数据处理并加以存储。

传感设备部分主要包括适于各种用途的发射、接收、测量仪器，例如雷达测高仪，激光测距仪、红外辐射仪、多普勒测频仪及时钟等等。

各种卫星所携带的设备，种类多少、性能高低不尽相同。但从七十年代后期以来所发射的民用卫星来看，是趋向于多功能、高效率、高精度。除了专题研究以外，为单一目的而设计的卫星不多，而是着重于发展卫星群，例如前面提到的子午卫星系统以及最新的尚未公开供使用的GPS卫星群。

卫星的名字有的有一定词义，有的是几个字的字头拼起来的。卫星的编号在文献中常见到两种形式，例如探险者Explorer-1（1958α），海洋卫星Seasat（1978-64A），括号内就是卫星编号，前一种形式是1963年前编号方法，希腊字母表示在这一年所发射的卫星顺序，α表示是第一个发射的；后一种形式是国际编号，64表示第64个，A表示是卫星本身，如果是B就表示发射该卫星用的火箭，也在轨道上运行，如果是C，D，E，…则表示已崩解的碎片或被撞出的零件（但是I和O这两个字母不用，另有用处），例如，1973年英国发射的成功号卫星的Prospero（1973-93C）就是一个入轨时被撞出来的天线。改为国际编号是因为卫星发射得越来越多，原来的方法分不清楚，新的编号不仅能看出发射年份，还能大致估计月份，例如1971-93A，因为那几年平均每年约120个卫星上天（参见图2-21），即每月10个左右，93显然是第十个月发射的，该卫星实际发射的时间是10月28日，大致差不多。最后的字母A若编到Z以后还有，那就可以编成AA，AB，…AZ；BA，

BB, …BZ; 等等。

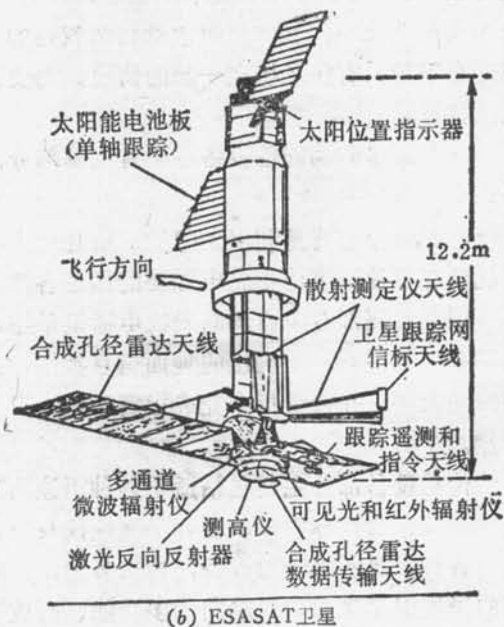
新的国际编号是由国际空间研究委员会 (COSPAR) 设计编排的，所有已发射卫星都登记编号列表，可供查阅。

即使有了新的编号方法，有的发射国家或机构也会偶有疏忽，自己搞错，引起误解。例如欧洲空间局于1977～1978年为了研究空间带电粒子发射了两个卫星，名字也分别叫做Geos 1号和2号，这两个卫星是按地球同步卫星 (Geostationary Satellite) 字头拼起来的，但是大地测量卫星 (Geodetic Satellite) 也是这个字头，所以重复了，后来COSPAR编号时加了ESA，变为ESA-Geos，但是有些文献包括ESA自己的文献目录仍把这两个卫星列在"大地测量卫星"标题下，因此对于我们研究大地测量的人来说，更要防止误会。

图 2-22～24 是一些卫星的示意图。



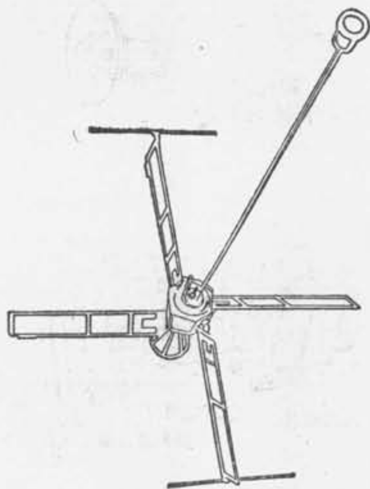
(a) GEOS 3 卫星



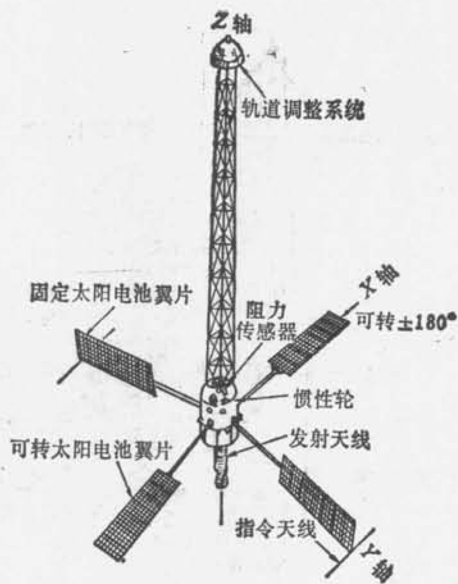
(b) ESASAT卫星

图 2-22


(a) 子午卫星星群

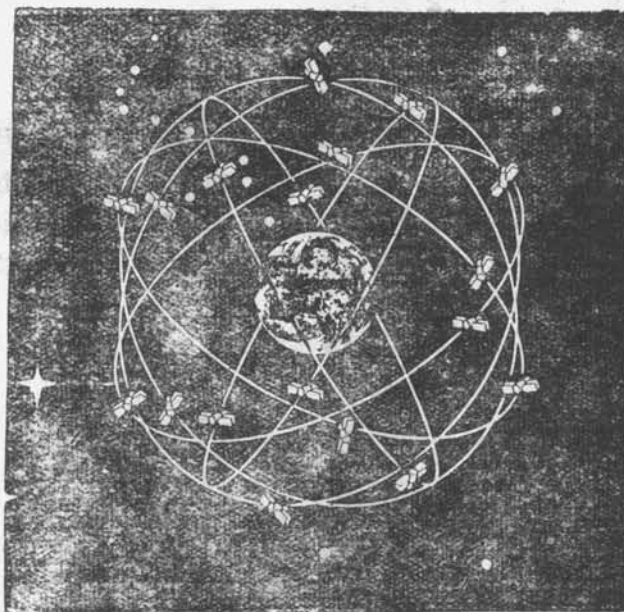


(*b*) 奥斯卡卫星

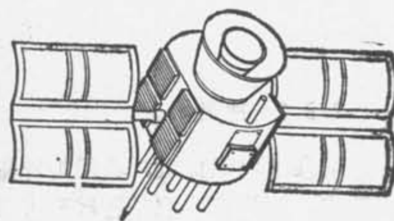


(*c*) 诺瓦卫星

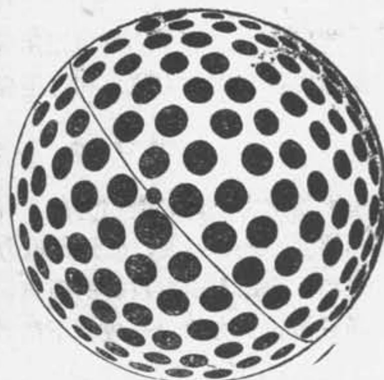
图 2-23



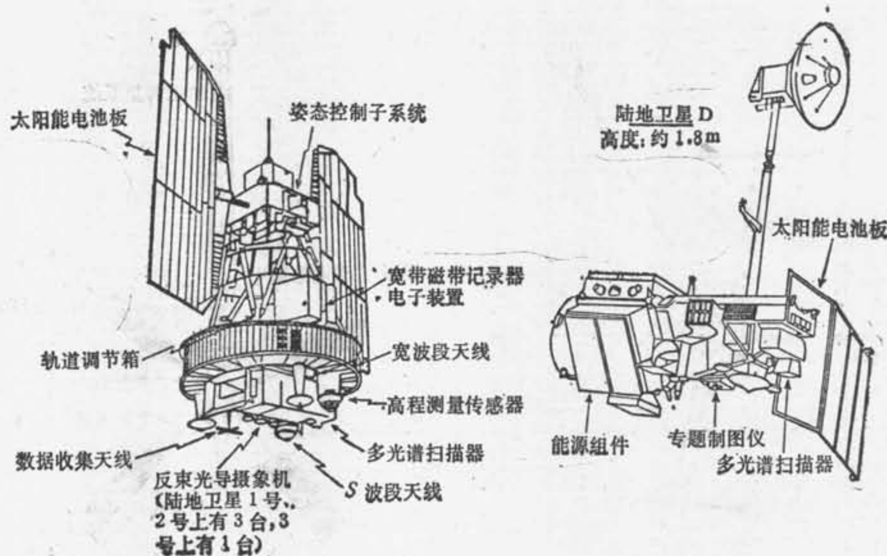
(*a*) GPS 卫星星群



(*b*) GPS 卫星



(*c*) LAGEOS 激光卫星



(d) 陆地卫星

图 2-24

§2.9 轨道力学方法

2.9.1 球谐拟合

前几节已经提过，表示地球形状的大地水准面是复杂的曲面，它的数学表达式无法严格写出，而只能采取某种数学近似，即用一个无穷的函数级数表示。为解决这个问题用过许多办法，例如采用球谐函数、样条函数等等，其中最为通用的是球谐函数。球谐函数级数实质上是傅立叶级数的发展，关于它的定义以及各种变换形式的深入应用，可见参考文献［8］，这里只是直观地讲如何用它来拟合大地水准面。

前已讲过，一个力场可以用等位面和力线来描述，大地水准面是重力等位面，而重力位是引力位与离心力位之和，通常写为

$$W(r,\ \phi,\ \lambda)=V(r,\ \phi',\ \lambda)+\frac{1}{2}\omega^2r^2\cos\varphi' \tag{2-14}$$

这里W是重力位，V是引力位，$(r,\ \phi',\ \lambda)$ 是任一质点的地心球坐标。即：地心矢径、地心纬度、地心经度；φ 是由重力方向决定的纬度，ω 是地球自转角速度，由于离心力位对于离开地球不随它自转的质点，作用停止，故可分开处理。这里只讨论引力位V，用球谐函数拟合引力位可写成以下级数：

$$V=\frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\phi')\cdot[C_{nm}\cos(m\lambda)+S_{nm}\sin(m\lambda)] \tag{2-15}$$

式中G是万有引力常数，M是地球质量，GM 是地心引力常数，R是地球平均赤道半径，

n 为级数项的阶数，m 为次数，$C_{n,m}$，$S_{n,m}$ 是特定的系数，$P_{n,m}$ 是缔合勒让德函数（即不含 λ 因子）。已知$P_{n,m}$的表示式如下：

表 2-3

n	m	$P_{n,m}$	经度项因子
0	0	1	
1	0	$\sin\varphi'$	
	1	$\cos\varphi'$	$\cos\lambda$，$\sin\lambda$
2	0	$\frac{1}{2}(3\sin^2\varphi'-1)$	
	1	$3\cos\varphi'\sin\varphi'$	$\cos\lambda$，$\sin\lambda$
	2	$3\cos^2\varphi'$	$\cos2\lambda$，$\sin2\lambda$
3	0	$\frac{1}{2}(5\sin^3\varphi'-3\sin\varphi')$	
	1	$\frac{3}{2}\cos\varphi'(5\sin^2\varphi'-1)$	$\cos\lambda$，$\sin\lambda$
	2	$15\cos^2\varphi'\sin\varphi'$	$\cos2\lambda$，$\sin2\lambda$
	3	$15\cos^3\varphi'$	$\cos3\lambda$，$\sin3\lambda$

由（2-15）式可知，若 $n=m=0$，则

$$V=\frac{GM}{r} \tag{2-16}$$

显然这是地球质量集中于地心（或地球是均匀密度分布的圆球）情况下的引力位，力场是中心力场，即仅随径向距离 r 而变。

如果将（2-15）式求和符号内的$\left(\frac{R}{r}\right)^n$提到外面，则求和符号内的各项因子与矢径 r 无关，这表示求和号内的各项是对等位面的拟合，所以这一部分就称为面球谐函数。由（2-15）可见，面球谐函数是二维周期函数，函数值必有正有负有零，可以再分成三种情况，即：$m=0$，$m=n$，$m\neq n$。

$m=0$，$n\neq0$，则 $P_{n,m}=P_{n,0}=P_n$，P_n 的表示式见表 2-3 中 $m=0$ 所相应的各式，这些P_n式就是已知的 n 阶勒让德多项式，其通式为

$$P_n(\sin\varphi')=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{d(\sin\varphi')}\right)^n(\sin^2\varphi'-1)^n \qquad n=0，1，2，\cdots\cdots \tag{2-17}$$

若将φ'换成$\theta=90°-\varphi'$，则 $\sin\varphi'=\cos\theta$，其余不变。此时面球谐函数不含λ因子，只随φ'而变，即各子午圈上变化都相同。在这种情况下，可在区间 $\theta=0\sim\pi$ 内按函数值由正变负所经的零值将全球分成 n 个平行圈方向的带区，相邻带区内函数值正负相间，如图 2-25（b）。因此 $m=0$相应的面球谐函数就称为带球谐函数。

$m=n$及 $m\neq n$ 都包含两个函数，此处不加推证（可参阅文献［8］，［18］），结论是：

$m=n$时，能使两个函数的函数值都为零的线。将球面分成南北方向的 $2n$ 个桔瓣状区，相邻各区正负相间，如图 2-25(c)，称为扇球谐函数；$m\neq n$则分成田字形区，称为田球谐函数，如图 2-25(a) 所示。

将三种情况合在一起，结果可将球面分成许多方块，各相邻方块正负相间，在 $\theta=0\sim\pi$ 之间有 ($n-m$) 个间距不等的平行圈，在经度增加方向有 $2m$ 个间距相等的子午圈，方块就是由这些平行圈和子午圈分割成的。例如图 2-25(b)，$m=0$，$n=7$，$n-m=7$，故有 7 个平行圈；图 2-25(c)，$m=7$，$n=7$，$m-n=0$，$2m=14$，故有14个子午圈；图2-25(a)，$m=6$，$n=9$，$n-m=3$，$2m=12$，故有 3 个平行圈，12 个子午圈。各图中阴影线区为正区，无阴影线为负区。

如果对应于图2-25(a) 画出整个球体，则如图2-26所示，由此可见，当 n 及 m 分别等于 9 和 6 时，即只取这样的低阶次，它所描述的球面起伏是比较显著的，当然这个图并未按实际比例，而是夸张了的。

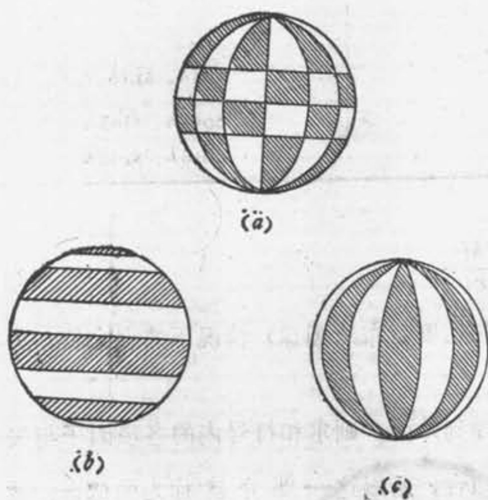


图 2-25

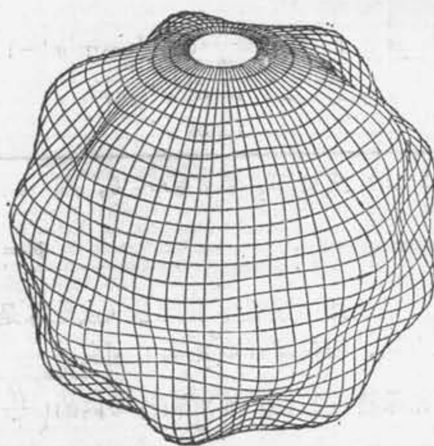


图 2-26

2.9.2 轨道力学法求地球形状

以上讲的是如何用球谐函数对不规则的大地水准面进行数学近似的方法，因此首先要判断地球面的大致形状，然后取不同阶次的球谐函数去逼近它，再经实测验证所取阶次是否足够逼近，反复进行。例如由 (2-15) 式可知，R是地球赤道半径，r是球外质点的矢径，$C_{n,m}$，$S_{n,m}$是球谐函数的系数，如果认为地球是个圆球，则必有$C_{0,0}=1$,$S_{1,0}=0$，如果地球是一个旋转扁球，此时各子午圈形状相同，因而不应出现经度因子，即只决定于带球谐函数，这时该式方括号内只剩一个C_{n}。这个系数有时表示为$C_{n}=-J_{n}$，称为带球谐函数系数，旋转扁球子午圈的形状可由它的数值来反映。是圆，它为1，反之若测得它不为1，就表示扁，从而可用来计算扁率。因此 (2-15) 式的关键是测定系数$C_{n,m}$和$S_{n,m}$，

测定的办法可以用地面重力测量，也可依据卫星轨道运动的异常。

我们这里先假定地球是旋转扁球体，因此只须考虑带球谐函数，若地球又是对称于赤道的旋转扁球，即对称旋转椭球，则更为简单，因为在J_n中只有n的偶阶而不出现奇阶带谐函数。如果测定的J出现奇阶，就说明地球南北不对称。

现在来看如何利用卫星轨道运动异常来描述旋转扁球的形状。

我们在§2.1讲过（参见图2-1），由于地球不是均质圆球，卫星轨道面相对于赤道面时时在变，引起这种变化的主要（还有其他）原因是扁地球相对于圆球好比赤道带外加了一环质量，在这个质量的引力作用下，卫星轨道面将绕地球自转轴转动，使转道升交点沿赤道移动，对于$i=45°$的情况，每天约有5°之多，这种升交点赤经的变化率$\dot{\Omega}$是直接与扁率成正比的，所以只要连续测观$\dot{\Omega}$三个月就能精确算出扁率值。1958年苏联第二个卫星升空以后不久，科学家们就用上述方法很快算出了扁率$f=1:298.2$（见参考文献［1］），这在当时人们不敢相信，因为在二百多年经典大地测量的历史中，人们化费了大量劳动和精力求得的扁率值，直到1957年认为最好的采用值是杰弗里斯（Jeffreys）算出的1:297.1±0.4*岂能一下子被几次卫星观测成果所推翻。这两个结果的差别不算小，用过去的扁率值计算，地球赤道直径比两极直径大42.94km，而按新扁率值计算，则是42.77km，相差170m，这对大地测量家又是个震动，因为过去已确认地球直径（即地球大小）已精确到10m，而现在竟然发现了170m的误差。

虽然这仅仅是卫星大地测量初期的成果，但是以后十年反复测算的结果证明，这个数值是可靠的。

现在我们先来看不同阶的带球谐函数拟合的结果如何。我们还是假定地球赤道对称旋转椭球，参见图2-27。图中虚线所画的就是这个椭球，这个图表示的是子午剖面。由图（a）可见，取用二阶带谐函数去拟合，或为一个更扁一些的椭球。若取用三阶带谐去拟合，则得到上窄下宽的形状（这就是梨形地球的子午剖面），如图（b）；若取四阶带谐拟合，呈现矩形，如图（c）；取用五阶带谐拟合，则呈现梅花形，如图（d）所示。

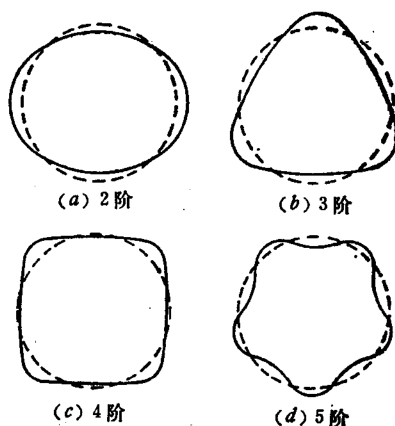


图 2-27

由此可以看出，每一阶相应于一个凸部，五阶就有五个凸部或五个花瓣，可见阶数越多，就越能逼近地球椭球体，两者的差别就越小，一般取到20至多30阶，以后的高阶球谐项就很小了。前面述所的根据升交点变化率求扁率，实际上只要取偶阶带谐，但由于轨道面对赤道的倾角不同，交点运动的可靠性不同，i越接近于90°越好，所以要根据不同倾角的卫星轨道测算比较，估计每一阶球谐项的强度。

---

* 苏联科学家1945年曾公布利用大量资料求出的地球扁率为1:298.3。

再看单是奇阶带谐项有什么效应。以后我们可以证明，奇阶带谐将反映卫星近地点地心距离有规则的变化，这是因为卫星轨道除了有上述轨道面绕地球自转轴的转动之外，还同时有轨道本身在轨道面内绕地球质心的转动，因而使近升距ω也在变。由于有了$\dot{\omega}$，近地点就可能会逐渐地由赤道以北移向赤道再到赤道以南，然后再回来，如果画出近地点位于最北及最南两个轨道相对于赤道的情况，则如图 2-28 所示。

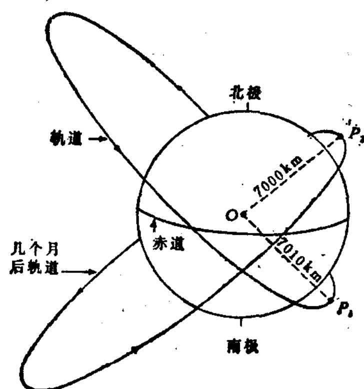


图 2-28

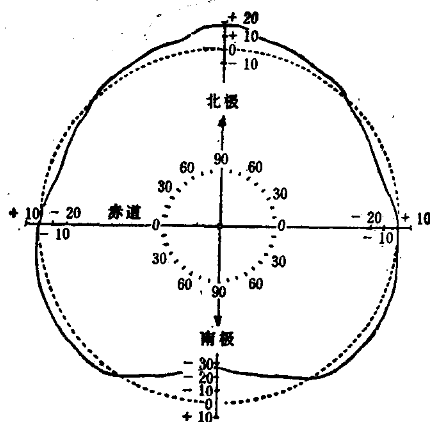


图 2-29 子午剖面（单位：m）

在这两个位置的近地点地心距，对于图中这个$i=45°$的卫星来说，变化了 10km，不同倾角i的卫星这个数字不同；例如$i=30°$，相差 7km；$i=90°$，相差 19km。根据不同i角卫星的观测结果可以算出各奇阶带谐项。近地点这种由北到南的往返要几个月才完成一次，而且变化比较平稳。

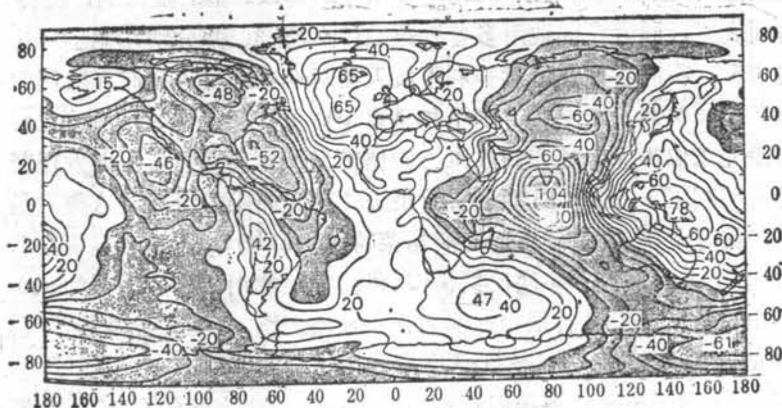
把奇阶偶阶合在一起，由全部带谐项描述的大地水准面子午剖面就是一个梨形，如图 2-29所示。北极高出平均椭球（图中虚线，$f=1:298.25$）18m，南极低进27m，当然此图的比例是夸张了的。此外由图 2-26 可知，不同子午剖面的形状并不相同，这里是取所有子午剖面平均而得的结果，事实上由于地球自转，它本身就在平均。

如果包括经度因子，即根据全部面球谐函数（参见图2-26）来描述大地水准面，画出大地水准面高度等值线图，则如图2-30所示。这个图是相对于$f=1:298.257$，$a=6378140$ m的椭球，这是由哥达德地球模型GEM10B计算的，取到36阶球谐项，对于全球大部分地区来说，精度优于 1m（见参考文献 [16]）。

在该图中没有区分陆地与海洋，而只表示大地水准面高出或低进椭球面的情况，有阴影的地方表示低进，无阴影则表示高出，等值线间距 10m。由图 2-30 可见，北极地区高出椭球面约 20m，南极地区低进约 25m，与图 2-29 基本一致，有点差别是由于只精确到 1m 以及制图误差。

从图 2-30 我们可以看到，真实大地水准面与椭球面差距最大的地方是在印度南部，深达 -104m，离此不远的新几内亚却是最高，高出78m。另外有两个高出的地方，一个在冰岛附近，65m；另一在马达加斯加南部，47m。低进的地方更多些，新西兰南部，-61

m；印度半岛中部，－60m；喜马拉雅山北部（约在我国新疆罗布泊地区），－60m；其他地方，例如在北美洲有三个低进处，似乎形成一个三角形的顶点，即：北部哈得孙湾，－48m；百慕大群岛南部，－52m；加利福利亚附近海区，－46m。



全球大地水准面高度（根据GEM-10B 单位：m）

图 2-30

图2-30是按目前最好的地球模型GEM10B计算的，用了一百万个以上的观测值，包括对卫星的摄影观测，多普勒观测和激光观测的观测值。各观测值数目比例大致相同，还包括地面和卫星测高法测定的重力场强，将几何测定成果和动力学测定成果并用，使用了1300个球谐项，计算规模之宏大，前所未有。因而结果有很高的价值（参见参考文献［16］）。

如果按GEM10B地球模型再作一个赤道剖面，可以看出大地水准面的赤道形状决不是圆。它与平均椭球圆形赤道的差别，如图2-31所示。图中反映出图2-30中大地水准面低进最多的印度南部（－104m）就在赤道附近，而图2-30中高出最多的（78m）地方也在赤道附近，只是经度不同。在赤道上高出最多处是印度尼西亚附近，72m。

将图2-29，2-30，2-31合起来看，显然要用一个三轴扁球来表示地球才比较合理，不过这对实际应用会有很大的不便。

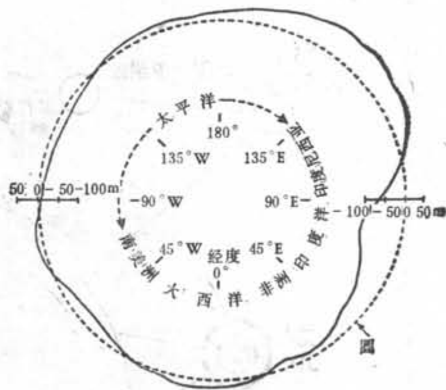


图 2-31　赤道剖面

§2.10　卫星大地测量的任务

本章讲到这里，已就卫星大地测量的基本原理和方法以及取得的一些成果作了总的概略的叙述，目的是要使以后各章的专题内容彼此有总体联系。

现在再以图2-32为例，将目前研究测定地球及其地壳变动的卫星测量方法综合在一起，以助于全面了解。图中示意了（从图左向右看）无阻卫星、卫星对卫星跟踪（高卫星以 ATS 型这类地球同步卫星为例，低卫星以 GEOS-3 型卫星为例，并表示了用激光或多普勒的双通道跟踪）、卫星测高（以 GEOS-3 和 SEASAT 型卫星为例，测高仪用雷达或激光测量至海面高度，同时在陆地用多普勒跟踪GEOS-3，并分别注明了可达精度）等方法测量地球的情况。图的右侧还示意了利用航天器对地壳断层进行激光监测的办法，反射棱镜分别安放在断层两侧，断层若有水平和垂直相对位移，就会使反射镜位置变化，从而使反射回去的激光束偏离原来的方向，由方向偏离量及距离变化量可以发现断层的运动。图的最右边是说明利用 LAGEOS 型紧实卫星进行激光测距的情况，这类卫星中还有一个值得提一下，就是法国 1975 年发射的斯塔莱特（Starlette），这个星更小些，是直径仅 20cm 的小球，整个表面嵌有许多块反射棱镜，供激光观测用，它的高度约 800～1100km，倾角 $i=50°$。由于这两个卫星有很合理的截面—质量比，抗阻力能力强，因而寿命会很长，Starlette估计能有 2 万年，LAGEOS 更长，估计在 100 万年以上。

图 2-32 中部画出了大陆，海洋以及水下的海山，海山上层约有 100km 厚的岩石圈，大陆就是露出海水面的岩石圈。由于下层岩流的侵蚀顶托，会使岩石圈相对变动，岩石圈板块运动每年约有 2～8cm，要用大地测量方法来监测这种现象，就要有足够的精度，因此无论是全球监测或局部监测都希望能有毫米的精度（见参考文献〔22〕）。图2-32中所列的数据及方法，绝大部分已经过试验或实行，少数（如航天器监测）尚未见到实测资料，但可望实现。

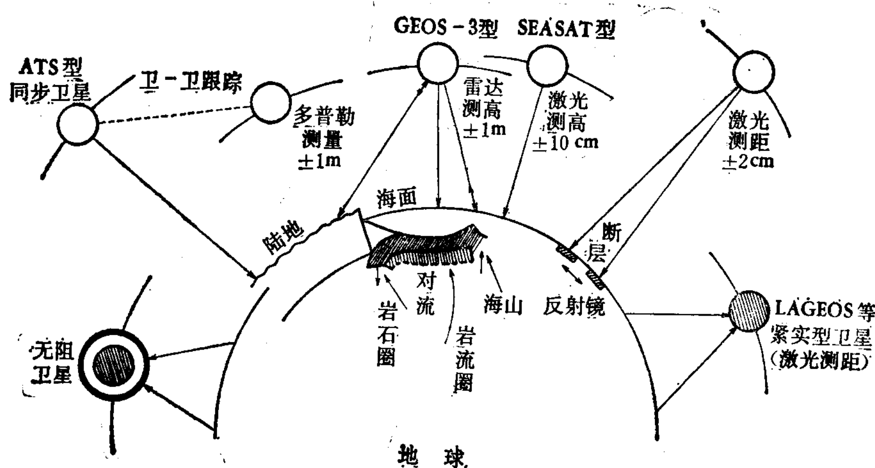


图 2-32　卫星大地测量方法综合图示

地球的变化有种种表现形式，如前所述，地球的形状在变，地球的自转速度也在变，因而地极在地球表面的位置也在变，包括周期性的和长期性的变化。这些变化又会引起地壳表面，重力场等位面在水平和垂直方向的变化，这就启发我们要考虑地面重力是否变化，水准测量的成果会否受到影响，等等，带来了许多值得研究的课题。

几百年来，大地测量学一直在谋求如何才能建立一个全球大地测量坐标系，把原点放在地球质心。过去，用经典大地测量方法很难实现，因为有了卫星测量方法，故现在能够做到。但是，地球在变，地球内部质量在不断地重新分布，那么质心在那里，变不变？（见参考文献 [22]）。地极不仅有周期性移动，还有长期偏移（平极长期向西经 78.2° 方向偏移，每年 0.00329″）（见参考文献 [30]），那么坐标轴如何安置？因此要建立一个固定于地球的全球大地坐标系就有许多复杂问题要研究处理。如果顾及时间函数关系，可以说是一个四维大地测量问题，或者说是一个三维时变空间内的大地测量问题。

现代大地测量的空间方法还包括利用对月球测量成果解决大地测量问题，按现代的观测技术水平，测月精度已经大大高于本章开头所提到的那些方法的精度，现在测月的主要手段是激光测距，月球上已经安放有好几个激光反射器，激光测月可用于建立地球惯性坐标系，测定地球自转速率和极移变化。由于设备和技术条件要求很高，许多国家难以实现，要国际合作才行。目前以美国取得的测月资料最多。

卫星大地测量是大地测量空间方法的重要组成部分，而且比较容易在各国广泛应用，至少在测定地面点几何位置方面已经如此。但是，大地测量的最终目标仍应是求得地球的几何和物理参数的瞬变信息，现代大地测量已经并将继续充分利用这一手段与新的地面测量（例如惯性测量）方法相结合，解决许多大地测量基本问题。例如，建立全球大地坐标系，测定分布在地球表面各地区（包括海洋上）的许多大地控制点在全球坐标系中的位置，测定地球引力位球谐系数，测定并描述大地水准面起伏变化，协助测定地球自转、极移、潮汐及其变化，等等。

本章前几节列举了国际上许多观测卫星的设备和方法，但根据我国的实际情况，仍以利用子午卫星（Transit）采用多普勒测频法以及利用测时测距卫星（Navstar，即GPS）采用一些特殊测量方法来解决大地测量应用问题较为现实可行。虽然这两种方法与其他方法比较起来都各有优缺点，但对我国的大地测量应用来说可能优点是主要的。这从下表的简要对比中也可以看出。

卫星观测设备及方法比较　　表 2-4

设备及方法	费用	可测卫星百分比	在100km处精度(m)	天气条件
摄影观测(Hewitt摄影机)	中等	50%	5	晴夜
摄影观测(Baker-Nunn摄影机)	中等	85%	10	晴夜
电子光学观测(GEODSS)	高	98%	10	晴夜
激光跟踪观测	中等	0.2%	0.02	晴
无线电相位干涉测向	中等	2%	200	任何
多普勒测频(Transit)	较低*	0.3%	1	任何
测时测距(Navstar)	较低*	0.3%	1	任何

此表摘自参考文献 [16]，费用栏中带*号的文字原为“中等”，改为“较低”，是考虑到我国只需购置流动型接收机，无需其他费用，故相对于上列其他设备而言费用较低。

可测卫星百分比是以在轨的近 5000 个人造天体为基数估算的。

第三章　人造卫星的轨道运动

§3.1　引　　言

研究人造天体的轨道运动要用到经典天体力学，而天体力学源于牛顿引力理论。

引力的作用可以达到很远的距离，例如太阳的引力在比日地距离大2万倍的地方，即距太阳3×10^{12}km处还能计算出来，某些慧星的绕日运动就说明了这个问题。

两质体之间的介质对引力的大小和作用毫无影响，不论是稠密介质，是真空还是星际空间都一样，有无障碍也对引力传播不发生影响。

引力传播是瞬息即至，无所谓传播速度。我们在§2.1中提到的拉普拉斯就研究过这个问题，他的结论是，假如要说有传播速度，那么这个速度要比光速大百万倍。

牛顿发现了引力，但是引力的本质直到二十世纪初才由爱因斯坦作了完满的解释，这就是他1914年发表的广义相对论。

天体力学研究天体运动大多数情况都是把每个天体看作质量集中于质心的质点，除非两质体离得很近，例如月球绕地球运动，就要重视地球形状引起的摄动（参见§2.1）。

即使如上述把天体看作质点，但因宇宙间有许多天体，彼此都有引力作用，在研究某两个天体的运动时，不能忽视其他天体对它们的作用，所以天体力学研究的一般是n个质点的引力作用问题，常称为n体问题，即研究n个质点在某一时刻的速度、位置，以及自此以后的运动规律。但是从数学上求解n体运动方程非常困难，事实上就连$n=3$也没有很方便的通解，而只能在某种条件下求得近似的特解。如果遇到三个天体中有一个质量很小，或者离得很远，它对其他两个天体作用很微小，就可以暂时不顾及它，这样就是$n=2$的二体问题，求解二体问题比较容易。如果这两个天体中有一个比起另一个来质量小得多，问题就更简单些，近地人造卫星绕地球的运动就是如此，而月球就可作为离得很远的第三体而暂不考虑。

从地球发射一个登月飞船有四体（地、月、日、飞船），探测金星的飞船飞近金星时有三体（日、金星、飞船）。可见，大地测量上可能遇到的通常是$n=2$、3、4的问题，即便如此，仍需要作一些简化才便于求解。

在天体力学中有一种研究n体问题的简化办法，即取n体中某一天体A_n作为被引力吸引的天体。其余$(n-1)$个天体A_1，A_2，…，A_{n-1}（其质量分别为m_1，m_2，…，m_{n-1}）作为对A_n施加引力作用的吸引体，而A_n不计其质量，认为它对$(n-1)$个吸引体无引力作用，这样就只要计算$(n-1)$个天体使A_n产生的运动加速度。这种办法称为限制n体问题。显然，$n=2$是限制二体问题，例如不计人造卫星的质量，研究它绕地球的运动，就是如此；$n=3$是限制三体问题，例如不计卫星质量，研究它在地球和月球共同作用下的运动，就是这种情况。

研究人造天体的运动有一些不同于自然天体的特点：

1. 自然天体的轨道是自然力决定的，只能测定它，用数学形式表达出来，人力无法改变，而人造天体的轨道是人力设计的，而且可随人的意愿改变，要研究如何设计得最经济合理、最有效，这是研究自然天体不会遇到的问题。

2. 自然天体是恒质量体运动，人造天体可能有变质量体运动的情况。例如卫星或飞船在入轨、飞行或调整轨道时火箭发动机消耗燃料排出废气都是变质量情况。

3. 人造天体有降落、轨道会合等问题，自然天体没有这种情况。

以大地测量为应用目的来研究人造卫星轨道运动时，一般都把它当作质点，也不计算它的质心在轨道上的振动。并且如§2.1所述把引力中心体地球先看成质点，即卫星在均质圆球引力场中运动，这就是两质点的二体问题，正常运动，然后再如§2.9所述，考虑在旋转椭球引力场甚至三轴椭球引力场中的运动，求出异常运动即摄动影响。

§3.2 基本运动方程

3.2.1 限制二体运动方程

如§3.1所述，限制二体运动是指被吸引质点对引力中心体没有引力作用，而一般二体运动则是两个质点都有相互吸引作用。

设如图3-1所示，A为引力中心体，例如地球，质量为M，p为卫星，质量为m，现在把m看作无穷小，来讨论限制二体运动。如图先取惯性坐标系$o\xi\eta\zeta$，A和p在此坐标系中的位置矢量$\vec{a}$，$\vec{\rho}$，$\vec{r}$分别如图所示。

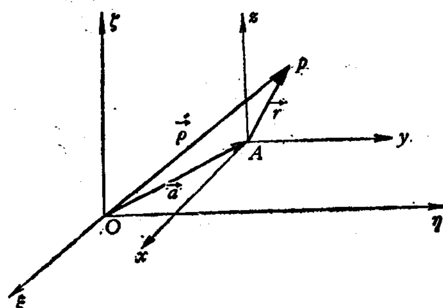


图 3-1

由牛顿第二定律可知，p质点在A的作用下，运动方程为

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-f\frac{Mm}{r^3}\vec{r} \tag{3-1}$$

令

$$K=fM \tag{3-2}$$

称为引力常数，则（3-1）可写为

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+K\frac{\vec{r}}{r^3}=0 \tag{3-3}$$

或写成

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2}+K\frac{\vec{\rho}-\vec{a}}{|\vec{\rho}-\vec{a}|^3}=0 \tag{3-4}$$

现在再研究一般二体运动的情形。再取另一坐标系$Axyz$，如图3-1，原点在A，各轴与$o\xi\eta\zeta$相应平行。设卫星p仍是在A的引力作用下运动，但是反过来A也要受到p的

引力作用，两者在坐标系 $o\xi\eta\zeta$ 中都有运动加速度，若卫星 p 受到的引力为

$$\vec{F} = -f\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

则地球 A 受到的力是

$$\vec{F}_1 = f\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

用 p 和 A 在 $o\xi\eta\zeta$ 坐标中的位置矢量表示，则有

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = -f\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

$$\vec{F}_1 = M\frac{d^2\vec{a}}{dt^2} = +f\frac{Mm}{r^3}\vec{r}$$

由此得

$$\frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} = -f\frac{M}{r^3}\vec{r} \tag{3-5}$$

$$\frac{d^2\vec{a}}{dt^2} = +f\frac{m}{r^3}\vec{r} \tag{3-6}$$

但因 $\vec{r} = \vec{\rho} - \vec{a}$，故知

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{\rho}}{dt^2} - \frac{d^2\vec{a}}{dt^2}$$

于是由（3-5）（3-6）式可得

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -f\frac{(M+m)}{r^3}\vec{r} \tag{3-7}$$

如果令

$$K = f(M+m) \tag{3-8}$$

则又得

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + K\frac{\vec{r}}{r^3} = 0 \tag{3-9}$$

比较式（3-9）与（3-3）以及（3-8）与（3-2），可见限制二体运动的微分方程（3-3）式和一般二体运动的微分方程（3-9）式，形式一样，所不同的是引力常数 K 的含义。（3-2）式可以说成是一体运动的引力常数，而（3-8）则是二体运动的引力常数。如果把（3-7）式与（3-1）式作比较，可以看出，一般二体运动的微分方程相当于限制二体运动中无穷小质量的被吸引质点绕一个质量为（$M+m$）的引力中心体运动的微分方程。

（3-3）或（3-9）式可以分解为三个标量方程：

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}+K\frac{x}{r^3}=0\\ \frac{d^2y}{dt^2}+K\frac{y}{r^3}=0\\ \frac{d^2z}{dt^2}+K\frac{z}{r^3}=0\end{aligned}\right\}\tag{3-10}$$

式中

$$r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}\tag{3-11}$$

3.2.2 面积积分

在§2.1中已经提过，卫星绕地球的正常运动服从开普勒定律，轨道面是个平面。卫星在坐标系 $Axyz$ 中的矢径 $\vec{r}$ 及速度 $\vec{v}$ 是时间函数，对于某一初始时刻 t_0，$\vec{r}=\vec{r}_0$，$\vec{v}=\vec{v}_0$。

我们讨论两种可能的情况：(1) $\vec{r}$ 和 $\vec{v}$ 不共线，即不位于同一直线上，或者两矢量不平行；(2) 两矢量共线。

(1) 第一种情况：$\vec{r}$ 和 $\vec{v}$ 不共线，

由（3-9）式，可得

$$\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-K\frac{1}{r^3}(\vec{r}\times\vec{r})$$

由于

$$\vec{r}\times\vec{r}=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right]=\frac{d\vec{r}}{dt}\times\frac{d\vec{r}}{dt}+\vec{r}\times\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

所以

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\frac{d\vec{r}}{dt}\right]=0$$

或

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}\times\vec{v}\right]=0$$

由此得

$$\vec{r}\times\vec{v}=\vec{\sigma}\tag{3-12}$$

式中 $\vec{\sigma}$ 是常矢量，因此对于 $t=t_0$ 时刻，同样有

$$\vec{r}_0\times\vec{v}_0=\vec{\sigma}\tag{3-13}$$

将（3-12）两边写为

$$\vec{r}\cdot(\vec{r}\times\vec{v})=\vec{r}\cdot\vec{\sigma}$$

故得

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{r}=0\tag{3-14}$$

可见，任何时刻，$\vec{r}$都垂直于$\vec{\sigma}$，这表明任何刻$\vec{r}$都在某一平面上，这个平面通过引力中心且垂直于矢量$\vec{\sigma}$。

（2）第二种情况：$\vec{r}$和$\vec{v}$共线，

这种情况下（3-12）（3-13）仍成立，但$\vec{\sigma}=0$，这时卫星就不是环绕运动，而是沿直线运动。证明如下：

由于
$$\vec{r}\times\vec{v}\equiv 0 \tag{3-15}$$

若用$\vec{p}$表示$\vec{r}$矢量的单位矢量，则
$$\vec{r}=r\vec{p} \tag{3-16}$$

将$\vec{r}$对t微分，得
$$\vec{v}=\dot{r}\vec{p}+r\dot{\vec{p}} \tag{3-17}$$

但因
$$\vec{p}\,\vec{p}\equiv 1 \tag{3-18}$$

将它微分，得
$$\vec{p}\cdot\dot{\vec{p}}=0 \tag{3-19}$$

将（3-16）和（3-17）做矢积，并顾及（3-15），得
$$r^2(\vec{p}\times\dot{\vec{p}})=0$$

若卫星不与中心体（质点）碰撞到一起，则$r\neq 0$，故只有
$$\vec{p}\times\dot{\vec{p}}=0 \tag{3-20}$$

利用矢量关系式
$$(\vec{a}\times\dot{\vec{b}})^2=\vec{a}^2\cdot\dot{\vec{b}}^2-(\vec{a}\cdot\dot{\vec{b}})^2$$

可得
$$(\vec{p}\times\dot{\vec{p}})^2=\vec{p}^2\cdot\dot{\vec{p}}^2-(\vec{p}\cdot\dot{\vec{p}})^2$$

顾及（3-18）～（3-20）可得
$$\dot{\vec{p}}\equiv 0 \qquad \vec{p}\equiv\vec{C}$$

式中$\vec{C}$为常矢量。于是得
$$\vec{r}=r\vec{C}$$

这就表示卫星沿直线运动，证毕。

公式（3-12）称为矢量的面积积分，下面我们证明$\vec{\sigma}$就是面积积分常数。

因为
$$\vec{r}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z}\end{vmatrix}$$
$$=\sigma_1\vec{i}\times\sigma_2\vec{j}+\sigma_3\vec{k}$$

所以矢量面积积分（3-12）式可写为

$$
\left.\begin{aligned}
y\dot{z}-z\dot{y}&=\sigma_1\\
z\dot{x}-x\dot{z}&=\sigma_2\\
x\dot{y}-y\dot{x}&=\sigma_3
\end{aligned}\right\}\tag{3--21}
$$

卫星运动平面的方程（3-14）可写为

$$\sigma_1 x+\sigma_2 y+\sigma_3 z=0 \tag{3-22}$$

若将 $Axyz$ 坐标系的 Axy 平面与卫星轨道面重合，则 $\vec{\sigma}$ 与 z 轴重合，于是 $\sigma_1=\sigma_2=0$，$\sigma_3=\sigma$，这个 σ 就称为标量面积积分常数，显然

$$\vec{\sigma}=\sigma\vec{k},\qquad \sigma=\pm|\vec{\sigma}| \tag{3-23}$$

由于这种情况下任何时刻都是

$$z\equiv0,\qquad \dot{z}\equiv0$$

所以（3-21）式就只有

$$x\dot{y}-y\dot{x}=\sigma \tag{3-24}$$

若用极坐标改换上式，即利用

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

可得

$$r^2\dot{\theta}=\sigma \tag{3-25}$$

这就是极坐标形式的面积积分。

1. 若 $\sigma>0$，则 $\dot{\theta}>0$（任何时刻都如此），

这表示，卫星的矢径与 Ax 轴的夹角 θ 总是增大，θ 增加的方向表示卫星运动的正方向（从 z 轴端看是逆时针）。

若 $\sigma<0$，则 $\dot{\theta}<0$，与上述结论相反。所以当 $\sigma>0$ 时，我们称卫星运动为顺行，$\sigma<0$ 时称为逆行。

当 $\sigma\neq0$ 且 $\vec{\sigma}$ 与 Az 轴方向也不一致时

$$\sigma=|\vec{\sigma}|=(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2)^{\frac{1}{2}} \tag{3-26}$$

2. 若将（3-25）写成

$$\dot{\theta}=\sigma/r^2$$

显然，卫星离引力中心越远时，角速度 $\dot{\theta}$ 越小。

3. 面积积分的几何意义

如图 3-2，设卫星在 t 及 $t+\Delta t$ 时刻的位置为 P 及 P'，矢径在轨道面上使 θ 角增大了 $\Delta\theta$，扫过的面积为 Δs，由图可见：

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1}{2}r^2\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

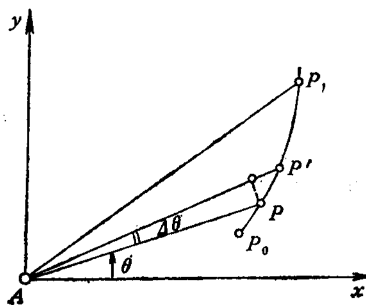


图 3-2

当 $\Delta\to0$，可得

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} \tag{3-27}$$

$\frac{ds}{dt}$称为扇形速度。由（3-25）可知

$$\frac{ds}{dt}=\frac{1}{2}\sigma=\text{常数} \tag{3-28}$$

因此面积积分的意义是，卫星相对于引力中心的扇形速度是常数。

设由 t_0 到 t_1 这段时间内，卫星走过弧 $\widehat{P_0P_1}$ 若令 s 为扇形 P_0AP_1 的面积，则由（3-28）可知，

$$s=\frac{1}{2}\sigma(t_1-t_0) \tag{3-29}$$

这就是开普勒第二定律，即卫星矢径扫过的面积与所用的时间成正比。

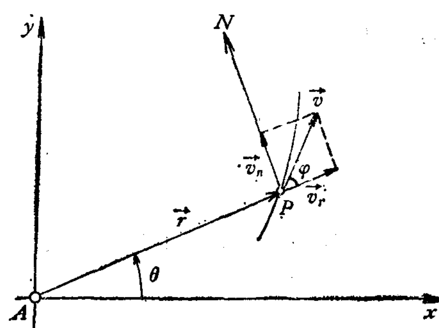


图 3-3

P 点的速矢 $\vec{v}$ 还可分为两个分量，如图 3-3 所示，即径向分量 $\vec{v}_r$（方向沿 AP 正向）及横向分量 $\vec{v}_n$（方向沿 PN 正向）在理论力学中已知这两个分量分别为

$$\left.\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_n &= r\dot{\theta} \end{aligned}\right\} \tag{3-30}$$

因此（3-25）可写为

$$rv_n=\sigma \tag{3-31}$$

令 φ 表示矢径 $\vec{r}$ 与速矢 $\vec{v}$ 之间的夹角，则

$$v_n=v\sin\varphi$$

于是（3-25）可写为

$$rv\sin\varphi=\sigma=\text{常数} \tag{3-32}$$

3.2.3 能量积分

将（3-9）式写成

$$\ddot{\vec{r}}=-\frac{K}{r^3}\vec{r} \tag{3-33}$$

用 $2\dot{\vec{r}}$ 数乘两边，得

$$2\dot{\vec{r}}\cdot\ddot{\vec{r}}=-\frac{2K}{r^3}\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}$$

或

$$\frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}^2)=-\frac{K}{r^3}\frac{d}{dt}(\vec{r}^2)$$

但因

$$\dot{\vec{r}}=\vec{v},\ \dot{\vec{r}}^2=\vec{v}^2=v^2,\ \vec{r}^2=r^2$$

故得

$$\frac{d}{dt}(v^2)=-\frac{\dot{K}}{r^3}\frac{d}{dt}(r^2)=-\frac{K}{r^3}2r\frac{dr}{dt}=2K\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)$$

或

$$\frac{d}{dt}(v^2)=\frac{d}{dt}\left(\frac{2K}{r}\right)$$

积分之，得

$$v^2-\frac{2K}{r}=h \tag{3-34}$$

式中 h 是积分常数。

(3-34) 式称为能量积分，为说明其意义，可改写为

$$\frac{1}{2}mv^2+\left(-\frac{mK}{r}\right)=\frac{1}{2}mh$$

上式第一项是卫星的动能，$-\frac{mK}{r}$是卫星的位能，此式表明在卫星运动期间动能与位能之和为常量，常数 h 可由起始条件求出，例如在某时刻 t_0，卫星离引力中心距离为 r_0，速度值为 v_0，则

$$h=v_0^2-\frac{2K}{r_0}$$

由能量积分可以看出：

(1) 当卫星从引力中心离去时，卫星速度减小，卫星趋向引力中心时，速度增大。始终保持 h 不变。

(2) 若卫星从引力中心离去，$r\to\infty$时速度趋于某个极限值，且 $v_\infty^2=h$，当然这要在 $h\geqslant 0$ 情况。

3.2.4 拉普拉斯积分

由卫星运动微分方程

$$\ddot{\vec{r}}=-\frac{K}{r^3}\vec{r} \tag{3-35}$$

及面积积分

$$\vec{\sigma}=\vec{r}\times\dot{\vec{r}} \tag{3-36}$$

可得

$$\vec{\sigma}\times\ddot{\vec{r}}=-\frac{K}{r^3}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})\times\vec{r}=\frac{K}{r^3}\vec{r}\times(\vec{r}\times\dot{\vec{r}})$$

利用以下变换式

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

可得

$$\vec{\sigma}\times\ddot{\vec{r}}=\frac{K}{r^3}[\vec{r}\cdot(\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}})-\dot{\vec{r}}\cdot(\vec{r}\cdot\vec{r})]$$

但因

$$\vec{r}\cdot\vec{r}=r^2$$

$$\vec{r}\cdot\dot{\vec{r}}=r\dot{r}$$

因此

$$\vec{\sigma}\times\ddot{\vec{r}}=\frac{K}{r^3}(r^2\cdot\dot{\vec{r}}-\vec{r}\cdot r\cdot\dot{r})=-K\frac{\dot{\vec{r}}\cdot r-\vec{r}\cdot\dot{r}}{r^2}=-K\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

或写成

$$\frac{d}{dt}(\vec{\sigma}\times\dot{\vec{r}})+K\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)=0$$

积分后得

$$\vec{\sigma}\times\vec{v}+K\frac{\vec{r}}{r}=-\vec{\lambda} \tag{3-37}$$

式中$\vec{\lambda}$是常矢量，(3-37)式称为拉普拉斯矢量积分，矢量$\vec{\lambda}$称为拉普拉斯矢量，位于引力中心至近地点方向，指向近地点，它正交于常数平面矢量$\vec{\sigma}$，即

$$\vec{\sigma}\perp\vec{\lambda}$$

或写为

$$\vec{\sigma}\cdot\vec{\lambda}=0 \tag{3-38}$$

由于$\vec{\sigma}\times\dot{\vec{r}}$正交于矢量$\vec{\sigma}$，故由（3-37）可得

$$-\vec{\sigma}\cdot\vec{\lambda}=\vec{\sigma}\cdot(\vec{\sigma}\times\dot{\vec{r}})+\frac{K}{r}(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})=\frac{K}{r}(\vec{\sigma}\cdot\vec{r})=0$$

上式表示，拉普拉斯矢量在三个坐标轴上的分量（λ_1，λ_2，λ_3）与面积常数矢量的三个分量（σ_1，σ_2，σ_3）有以下关系：

$$\sigma_1\lambda_1+\sigma_2\lambda_2+\sigma_3\lambda_3=0 \tag{3-39}$$

由于$\vec{\sigma}$正交于轨道面，所以$\vec{\lambda}$必在轨道面上。

还可证明存在以下关系：

$$\lambda^2=K^2+h\sigma^2 \tag{3-40}$$

3.2.5 轨道方程

利用面积积分和拉普拉斯积分可求出卫星轨道方程。重写这两个积分如下：

$$\vec{r}\times\vec{v}=\vec{\sigma} \tag{3-41}$$

$$\vec{\sigma}\times\vec{v}+K\frac{\vec{r}}{r}=-\vec{\lambda} \tag{3-42}$$

设当 $\vec{\sigma}=0$时，由（3-42）式可得

$$\vec{r}=-\frac{r}{K}\vec{\lambda}$$

这是直线轨道方程。

当 $\vec{\sigma}\neq 0$ 时，将（3-42）式数乘 $\vec{r}$，得

$$\vec{r}\cdot(\vec{\sigma}\times\vec{v})+\frac{K}{r}(\vec{r}\cdot\vec{r})=-\vec{\lambda}\cdot\vec{r}$$

或

$$\vec{\sigma}\cdot(\vec{v}\times\vec{r})+\frac{K}{r}r^2=-\lambda r\cos\theta$$

式中 θ 为矢量 $\vec{\lambda}$ 和 $\vec{r}$ 之间的夹角，利用（3-41）式，可求得

$$r(K+\lambda\cos\theta)=\sigma^2$$

显然，当 $\sigma\neq 0$ 时，$K+\lambda\cos\theta\neq 0$，因此得

$$r=\frac{\sigma^2}{K+\lambda\cos\theta}$$

即

$$r=\frac{\sigma^2/K}{1+(\lambda/K)\cos\theta} \tag{3-43}$$

令

$$p=\frac{\sigma^2}{K},\qquad e=\frac{\lambda}{K} \tag{3-44}$$

则（3-43）变为

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta} \tag{3-45}$$

这就是卫星运动轨道方程（$\sigma\neq 0$）。

这是以极坐标表示的圆锥曲线方程，极点在曲线焦点上，焦参数为 p，偏心率为 e，角 θ 是圆锥曲线对称轴与卫星矢径之间的夹角，参见图 3-4。

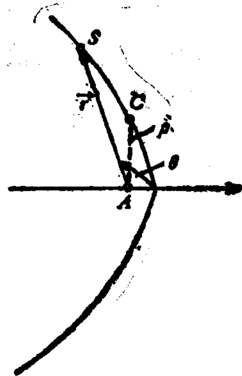


图 3-4

由开普勒第一定律可知，卫星相对于引力中心的运动总是沿着圆锥曲线（椭圆、双曲线、抛物线，或直线）进行，引力中心位于曲线的某个焦点。

由（3-40）式及（3-44）式可以求得

$$e=\sqrt{1+h\frac{\sigma^2}{K^2}} \tag{3-46}$$

因此，知道K，σ，h三个常数就可求出轨道偏心率e和焦参数p，用e，p就可完全确定轨道的形状和大小，不过还未确定轨道在空间的位置。

由（3-45）式可知，当$\theta=0$时，r为最小，即

$$r_\pi=\frac{p}{1+e} \tag{3-47}$$

对于椭圆轨道而言，这个r_π是引力中心A到近心点Π的长度，称为近心距。若引力中心体是地球，则Π称为近地点，r_π称为近地距。显然，r_π位于轨道椭圆的长轴上。若用Π'表示远地点，则$A\Pi'$就是远地距，用r_a表示，因此轨道椭圆长轴的长度$2a$为

$$r_a+r_\pi=2a$$

对于椭圆轨道，当$0<e<1$时，θ为任何值都使（3-45）式为正值。而θ是$A\Pi$和卫星径矢的夹角，我们称它为真近点角，从$A\Pi$方向起算。当卫星运动到近地点Π时，$\theta=0$，径矢最短，为r_π；卫星运动到远地点时，$\theta=\pi$，由（3-45）式亦可看出，径矢最长，为r_a。即

$$r_a=\frac{p}{1-e}$$

近地点Π和远地点Π'也称为拱点，而长轴$\Pi\Pi'$也称为拱线，或拱轴。

椭圆轨道的形状和大小可从以下参数

$$p,\ e,\ a,\ b,\ c,\ r_a,\ r_\pi$$

中任选两个已知参数，即可求出其他参数，例如：

$$b^2+c^2=a^2 \qquad b=a\sqrt{1-e^2}$$

$$p=b^2/a \qquad p=a(1-e^2)$$

其中b是椭圆半短轴，c是引力中心到椭圆中心的距离。双曲线及抛物线轨道情况类似。

3.2.6 卫星运动速度及其分量

如果已知引力常数K，卫星轨道参数p，e，以及任一时刻的真近点角，就可计算速度v。因为：

$$v_r=\dot{r}, \qquad v_n=r\dot{\theta}$$

$$r=p/(1+e\cos\theta)$$

$$r^2\dot{\theta}=\sigma$$

故得

$$v_r=\frac{dr}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}=\frac{pe\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}\cdot\frac{\sigma}{r^2}$$

$$v_n=\sigma/r$$

利用（3-44）和（3-45）式，可求得

$$v_r=\sqrt{\frac{K}{p}}\,e\sin\theta=\frac{\sigma}{p}e\cos\theta \tag{3-48}$$

$$v_n=\sqrt{\frac{K}{p}}(1+e\cos\theta)=\frac{\sigma}{p}(1+e\cos\theta) \tag{3-49}$$

而

$$v=(v_r^2+v_n^2)^{\frac{1}{2}}$$

于是有

$$v=\left[\frac{K}{p}(1+e^2+2e\cos\theta)\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3-50}$$

根据卫星轨道速度及其分量的表示式（3-48）～（3-50），我们可以作如下分析：

（1）卫星在近地点速度最大，因为 $\theta=0$，$v_r=0$，速度方向垂直于径矢，最大值为

$$v_\pi=\sqrt{\frac{K}{p}}\cdot(1+e) \tag{3-51}$$

（2）对于椭圆轨道，卫星在远地点速度最小，即

$$v_a=\sqrt{\frac{K}{p}}\cdot(1-e) \tag{3-52}$$

（3）若已知引力常数，以及卫星在任一时刻的轨道位置和速度，就可计算轨道的形状和大小，即由（3-45）、（3-48）和（3-49）式用 r、v_r、v_n 三个量计算 e 和 p。

（4）对于椭圆轨道，有以下关系

$$\frac{v_\pi}{v_a}=\frac{r_a}{r_\pi} \tag{3-53}$$

因为

$$r_a=a+c=a(1+e)$$

$$r_\pi=a-c=a(1-e)$$

用上两式及（3-51）和（3-52）式即可求出（3-53）式。

这就表示，卫星近地点速度比远地点大多少倍，远地距就比近地距长这么多倍。

§3·3　能量常数与轨道半长轴关系

1．由能量积分（3-34）式可知

$$v^2=\frac{2K}{r}+h \tag{3-54}$$

若卫星在近地点，则 $r=r_\pi$，$v=v_\pi$，于是

$$h=v_\pi^2-\frac{2K}{r_\pi} \tag{3-55}$$

利用以下关系式

$$r_\pi=p/1+e=a(1-e)$$

$$v_\pi=\sqrt{\frac{K}{p}}\cdot(1+e)$$

则（3-55）式可写为

$$h=\frac{K}{p}(1+e)^2-\frac{2K}{r_\pi}=\frac{K}{r_\pi}(1+e)-\frac{2K}{r_\pi}=\frac{-K}{r_\pi}(1-e)$$

即

$$h=-\frac{K}{a} \tag{3-56}$$

于是（3-54）可写为

$$v^2=K\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right) \tag{3-57}$$

§3·4　引力常数

考虑卫星在椭圆轨道运动的情形：

1．设T——卫星连续两次经过近地点的时间间隔，称为周期；

　τ——从卫星经过近地点时刻t_0起算的时间，即$\tau=t-t_0$；

　s——矢径在τ时间内扫过的面积，按开普勒第二定律，

由（3-29）式，$s=\frac{1}{2}\sigma\ (t-t_0)$；

卫星经过一个周期T后，扫过整个椭圆面积，所以

$$\pi ab=\frac{1}{2}\sigma T$$

$$T=\frac{2\pi ab}{\sigma}=\frac{2\pi ab}{\sqrt{K}\sqrt{p}}=\frac{2\pi ab}{\sqrt{K}\sqrt{b^2/a}}$$

即

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{K}}a^{3/2} \tag{3-58}$$

若已知K及a，可求T。

上式可改写为

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{K}{4\pi^2}=\frac{fM}{4\pi^2} \tag{3-59}$$

令 $n=\frac{2\pi}{T}$称为平均运动角速度，或简称平均运动，则由（3-58）式可得

$$n=\frac{\sqrt{K}}{a^{3/2}} \tag{3-60}$$

如果另外有一小卫星，其轨道运动周期为T_1，半长轴为a_1，则又有

$$\frac{a_1^3}{T_1^2}=\frac{fM}{4\pi^2}$$

由（3-59）式可得

$$\frac{T^2}{a^3}=\frac{T_1^2}{a_1^3} \tag{3-61}$$

这就是开普勒第三定律。

由§3.2.1 可知，这是在限制二体运动的情况下导出的，如果考虑一般二体运动，则（3-59）式中的 fM 应换成 $f\ (M+m)$，于是相应于（3-59）式有

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{f(M+m)}{4\pi^2}=\frac{K}{4\pi^2} \tag{3-62}$$

类似上面的推导，可得

$$\frac{T^2}{T_1^2}\cdot\frac{1+m/M}{1+m_1/M}=\frac{a^3}{a_1^3} \tag{3-63}$$

（3-63）式是精确的开普勒第三定律，可用于计算行星及自然卫星的质量。

2．计算卫星绕地球运动周期

假定中心体地球在此问题中取作半径为 r_0 的圆球，质量为等密度球面分布，某一高度为零的卫星绕此中心体运动的周期为

$$T_0=2\pi r_0{}^{3/2}/\sqrt{fM}$$

而另外的高度不为零的卫星，其周期应为

$$T=2\pi a^{3/2}/\sqrt{fM}$$

于是得

$$T=T_0\left(\frac{a}{r_0}\right)^{3/2} \tag{3-64}$$

由于 $a>r_0$，则 $T>T_0$，理论上 $T_0=84.3\text{m}$，这是紧贴地面(圆球面)绕转的零高度卫星的周期，而实际上人造卫星的 T 不能小于 87.7m，否则不能运转。

利用（3-64）式可以计算所发射卫星的周期，只要求测出近地点高度 H_π 和远地点高度 H_a，因为

$$a=\frac{1}{2}(2r_0+H_a+H_\pi)$$

故由（3-64）式可得

$$T=T_0\left(1+\frac{H_a+H_\pi}{2r_0}\right)^{3/2} \tag{3-65}$$

3．计算引力常数

在（3-8）式中引力常数为

$$K=f(M+m)$$

根据开普勒第三定律可得（3-62）式如下

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{f(M+m)}{4\pi^2}=\frac{K}{4\pi^2} \tag{3-66}$$

可见K是系数f和相互作用的两质量的乘积，又可表示为轨道半长轴a及周期T的函数，f有时用k^2或G表示，称为万有引力常数或牛顿引力常数，但在天文学上至今仍采用高斯计算出来的k值，所以又称k为高斯引力常数。

如果是讨论太阳和地球的相互作用，太阳是引力中心，这时计算K用太阳和地球的质量之和同系数f相乘，其结果称为日心引力常数，用GS表示，即$K=GS$。

是如果讨论月球（或人造卫星）绕地球的运动，地球是引力中心，则用地球质量和月球（或人卫）质量之和乘以f，其结果称为地心引力常数，用GE表示，即$K=GE$，此外，由于地球有大气层，大气层的质量也应包括在地球质量内。

类似地，还可有月心引力常数，地月系质心引力常数等等。

牛顿生前并没有把引力常数f准确算出来，而是后来由卡文迪希（Cavendish）通过实验测定的，用实验室单位制厘米·克·秒（CGS）单位表示，其现代数值为

$$f=G=k^2=(6.672\pm0.004)。10^{-11}\mathrm{m}^3.\mathrm{km}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$$

这个数值只有四位有效数，而且用于研究天体运动时用克或千克表示天体质量显然不现实，天体质量测定精度达不到这个单位。例如太阳质量现代数值是$(1.9891\pm0.0012)\cdot10^{30}\mathrm{kg}$，误差如此之大，此外天体间的距离也测不到厘米或米的精度，例如日地之间的平均距离（即一个天文单位）现代值是

$$A=1.4959787066\times10^{11}\mathrm{m}\pm2000\mathrm{m}$$

高斯是根据开普勒第三定律并恰当选取单位制来精确计算k值的，质量取太阳质量为单位，距离取天文单位为单位，即$M=1$，$a=1$，地球质量也以太阳质量为单位，于是由（3-66）式得

$$k=\frac{2\pi}{T}\left(1+\frac{m}{M}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{3-67}$$

这样就只需知道地球与太阳质量比以及地球绕日一整周（2π）的时间，即一个恒星年的平太阳日数，而这两个数比较容易求得准确，例如取

$$T=365.2563835$$

$$\frac{m}{M}=0.000002819$$

算得

$$k=0.01720209895$$

至少有9位有效数，精度要高得多。

而

$$k^2=0.000295912208286$$

由（3-66）式可知

$$f=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{a^3}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\cdot M}$$

如果T不是象（3-67）式那样以平太阳日为单位，而是以秒为单位，则应将T乘以86400秒，即

$$f=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{a^3}{\left(1+\frac{m}{M}\right)\cdot M\cdot 86400^2}$$

令 $86400=T'$，顾及式（3-67），上式便成为

$$f=k^2\cdot\frac{a^3}{M\cdot(T')^2} \tag{3-68}$$

用上式可以将根据开普勒第三定律导出的引力常数 f 表示为 CGS 制单位，例如用我们前面列出的天文单位数值表示 a，用太阳质量的数值表示M，而 k^2 值也用上文求出的值，T' 用 86400 秒，便可算出：

$$f=6.672\times10^{-8}\mathrm{cm}^3\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

和现代实验测定值一致。

天文学上约定，将高斯常数 k 看成是精确的规定常数，不作变动，而天文单位所含米数的测定值以及时间秒的长短有可能随着技术水平的提高而变，可以定期修改，从而改变 f 的数值。

对于研究将太阳作为主要引力质量的有关问题时，可将上述 f 值乘以太阳质量 $M_\odot$，得日心引力常数为

$$GS=6.672\times10^{-11}\cdot M_\odot=(1.32712438\times10^{20}\pm5.10^{12})\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

对于研究以地球质量M_e为主要引力质量的问题时，可求得地心引力常数为

$$GE=6.672\times10^{-11}\cdot M_e=(39860047\pm5)\times10^7\mathrm{m}^3\mathrm{s}^{-2} \tag{3-69}$$

4．应用上的变换

在研究人造地球卫星运动时，常常为使运动微分方程简洁且便于运算，取其中的 $K=f(M_e+m)=1$。m总是不计的，即取 $m=0$，因而要使 $K=fM_e=1$。为此可将（3-68）式中的M用M_e代换，将 a 用地球赤道半径 a_e 代换，T 取日为单位。根据现代数值，取：

$$a_e=6378137\mathrm{m}$$

$$\frac{A}{a_e}=2345.791 \qquad \frac{M}{M_e}=3329.46$$

则可算得

$$f=k^2\cdot38754389.54=11467.896 \tag{3-70}$$

这是换成以地球半径、地球质量、平太阳日为单位（即 $a_e=1$，$M_e=1$，$T=1$）相应的 f 值。为使$K=1$，还要再作变换，此时只能变换时间单位，使 $T^2=11467.896$。

如果根据（3-66）式，将 T^2 表示成下式，并用（3-69）式的数值代入计算，可得

$$\left.\begin{aligned}&T^2=\frac{a_e}{fM_e}=\frac{a_e}{GE}=650944.1396\mathrm{s}^2\\&T=806.8111\mathrm{s}=13.4468517\mathrm{min}\\&\frac{1}{T}=0.07436685\end{aligned}\right\} \tag{3-71}$$

因为1日＝1440m，现在如取13.4468517min为一个时间单位，则一日含有107.08826个这种时间单位，平方之恰好等于11467.896。经这样变换时间单位后，就可使$f=1$，从而使$K=1$。

由上面的计算可见，如果a_e，GE等取值不同，会使f和T的计算结果不同，应用时要按相应值变换，以免弄错。

§3.5 开普勒方程及其解

图 3-5

1．偏近点角E

设如图3-5所示，取坐标系原点在椭圆中心，x，y轴如图，由图可见，椭圆上P点在此坐标系中的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos E \\ y &= b\sin E \end{aligned}\right\} \tag{3-72}$$

式中E角称为偏近点角。

从图3-5中可以看到，引力中心A的坐标为（c，o），故得

$$r^2=(a\cos E-c)^2+(b\sin E)^2$$

因为

$$c=ae, \quad b^2=a^2(1-e^2)$$

代入上式，最后可得

$$r=a(1-e\cos E) \tag{3-73}$$

这是r与E的关系式。

2．开普勒方程

r与E的关系已由（3-73）式建立，而r与时间t的关系也已建立，即径向速度表示式（3-48），而E是从t_0时刻起算的，所以利用这两个关系式就可求得E和$t-t_0$的关系式。

由（3-48）式可得

$$\frac{dr}{dt}=\frac{\sigma}{p}e\sin\theta \tag{3-74}$$

又由图（3-5）可见，任一时刻P点的纵坐标等于

$$b\sin E=r\sin\theta \tag{3-75}$$

微分（3-73），得

$$\frac{dr}{dt}=ae\sin E\frac{dE}{dt} \tag{3-76}$$

于是可得

$$r\frac{dE}{dt}=\frac{b}{a}\frac{\sigma}{p}=\frac{b}{a}\sigma\frac{a}{b^2}=\frac{\sigma}{b}$$

顾及（3-73），得

$$(1-e\cos E)\frac{dE}{dt}=\frac{\sigma}{ab}$$

即

$$\frac{d}{dt}(E-e\sin E)=n \tag{3-77}$$

式中

$$n=\sigma/ab=\sqrt{\frac{K}{a^3}} \tag{3-78}$$

由（3-77）即可求得

$$(E-e\sin E)=n(t-t_0) \tag{3-79}$$

或

$$E-e\sin E=n\tau \tag{3-80}$$

这就是适用于椭圆轨道的开普勒方程。

3．平近点角

(3-79）式中出现的 $n(t-t_0)$，可以设想为有一个假的卫星在 $t-t_0$ 这段时间，以平均运动速度 n 运动，走过的一段弧所形成的近点角，通常称为平近点角，用 M 表示，有

$$M=n(t-t_0) \tag{3-81}$$

平近点角 M 与偏近点角 E 的关系式，就是开普勒方程。

4．偏近点角与真近点角 θ 的关系

利用

$$r=a(1-e\cos E)$$
$$p=a(1-e^2)$$

代入(3-45)式即得

$$1-e\cos E=\frac{1-e^2}{1+e\cos\theta}$$

由此可得

$$\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+e}{1-e}\mathrm{tg}^2\frac{E}{2} \tag{3-82}$$

4．开普勒方程的求解

利用开普勒方程(3-80)式，可由平近点角 M 求出偏近点角 E，再用(3-82)式求真近点角 θ，而 θ 和卫星矢径 r 决定卫星在轨道上的位置，所以开普勒方程是一个重要公式。

但是开普勒方程是超越方程，直接求解困难，过去有过多种近似求解方法，但现在有了电子计算机，用迭代法很快就能算出具有任何预期精度的结果，所以其他方法不太重要了。开普勒方程不仅适用于椭圆轨道，也适用于双曲线轨道，本节只讨论椭圆轨道情形。

（1）由开普勒方程(3-80)式可得

$$\phi(E)=E-e\sin E=M \tag{3-83}$$

对于给定的 $M=n(t-t_0)$ 值，开普勒方程的解 E 应为曲线 $\phi(E)=E-e\sin E$ 与直线 $\phi(E)=M$ 的交点上的 E 值。

由于 $0<e<1$，故有

$$\frac{d\theta}{dE}=1-e\cos E=\frac{r}{a}>0$$

所以函数 $\phi(E)$ 在 $(-\infty,\ +\infty)$ 区间单调增加，对于任一 M 值，直线 $\theta(E)=M$ 与函数曲线只能有一个交点，所以开普勒方程有解，且是唯一解。

又由于 $M=k\pi$ 时，（k 为任一正整数），$E=M$，而

$$\frac{dE}{dM}=\frac{1}{1-e\cos E}>0$$

即 E 随着 M（即随时间 t）单调增加，所以当

$$k\pi\leqslant M\leqslant(k+1)\pi$$

时，E 也相应是

$$k\pi\leqslant E\leqslant(k+1)\pi$$

如果用迭代法求解开普勒方程，对于所给的 M 值，可先取作 E 的近似值。即

$$\left.\begin{aligned}E_1&=M\\E_2&=M+e\sin E_1\\E_3&=M+e\sin E_2\\&\ \vdots\qquad\quad\vdots\\E_{n+1}&=M+e\sin E_n\end{aligned}\right\} \tag{3-84}$$

直到 E_{n+1} 与 E_n 之差小于预期精度为止。

（2）收敛性证明

设 E 为开普勒方程真解，则各近似值与它之差组成的数列：

$$E_1-E,\ E_2-E,\ E_3-E,\ \cdots,\ E_n-E$$

应该绝对收敛，极限为零。

根据(3-84)式

$$E_{n+1}=M+e\sin E_n$$

可得

$$\frac{E_{n+1}-E}{E_n-E}=\frac{M-E+e\sin E_n}{E_n-E}=\frac{e(\sin E_n-\sin E)}{E_n-E}$$

$$=e\cos\frac{E_n+E}{2}\ \frac{\sin\frac{1}{2}(E_n-E)}{\frac{1}{2}(E_n-E)}$$

故可得

$$\left|\frac{E_{n+1}-E}{E_n-E}\right|\leqslant e<1 \tag{3-85}$$

或

$$|E_{n+1}-E|\leqslant e^n|E_1-E|$$

即

$$\lim_{n\to\infty}|E_{n+1}-E|=0$$

因为方程真解E确定，故

$$\lim_{n\to\infty}E_{n+1}=E$$

这说明迭代近似值E_n必然趋近于真值E，当e很小时，收敛很快，e相当大时，迭代次数要增加很多，但用电子计算机困难不大。

§ 3.6 卫星坐标及速度的平近点角表示式

对于e很小的轨道，卫星的坐标及速度可直接用平近点角近似表示。由(3-84)式，可取

$$E\approx M+e\sin M \tag{3-86}$$

当计算精度只要求达到e的零阶量时，由上式得

$$(\cos E)_{e=0}=\cos M \tag{3-87}$$

1. 求r的近似式

由(3-73)式并顾及(3-87)式，得

$$r\approx a(1-e\cos M) \tag{3-88}$$

2. 求θ的近似式

由面积积分(3-25)式

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\sigma \tag{3-89}$$

利用

$$M=n(t-t_0) \tag{3-90}$$

可得

$$\frac{d\theta}{dM}=\frac{\sigma}{n}\ \frac{1}{r^2} \tag{3-91}$$

因为

$$\frac{dE}{dM}=\frac{1}{1-e\cos E} \tag{3-92}$$

利用(3-73)式，可得

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{a}\ \frac{dE}{dM} \tag{3-93}$$

因

$$\sigma=\sqrt{Kp},\quad p=a(1-e^2),\quad n=\sqrt{K/a^3} \tag{3-94}$$

故

$$\frac{d\theta}{dM}=\sqrt{1-e^2}\left(\frac{dE}{dM}\right)^2 \tag{3-95}$$

再由(3-86)式求得精度达到e的零阶量近似式为

$$\frac{dE}{dM}\approx 1+e\cos M$$

对于精度达e的一阶量的近似式为

$$\left(\frac{dE}{dM}\right)^2\approx 1+2e\cos M$$

根据(3-95)，若取$\sqrt{1-e^2}\approx 1$，则得

$$\frac{d\theta}{dM}\approx 1+2e\cos M$$

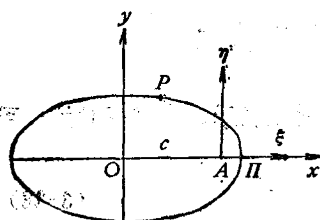


图 3-6

积分后，得

$$\theta\approx M+2e\sin M \tag{3-96}$$

3. 轨面直角坐标近似表示式

参照图 3-5，在引力中心A另取平面直角坐标系$A\xi\eta$，如图 3-6，则卫星P在该坐标系中的坐标可表示为

$$\left.\begin{aligned}\xi&=a(\cos E-e)\\ \eta&=b\sin E=a\sqrt{1-e^2}\sin E\end{aligned}\right\} \tag{3-97}$$

再求出速度分量

$$\left.\begin{aligned}v_r&=\frac{dr}{dt}=n\frac{dr}{dM}\\ v_s&=r\frac{d\theta}{dt}=rn\frac{d\theta}{dM}\end{aligned}\right\} \tag{3-98}$$

利用本节列出各式不难求得e很小时卫星的坐标及速度近似式为

$$\left.\begin{aligned}\xi&\approx a\left[\cos M-\frac{1}{2}e(3-\cos 2M)\right]\\ \eta&\approx a\left[\sin M+\frac{1}{2}e\sin 2M\right]\\ v_r&\approx nae\sin M\\ v_s&\approx na(1+e\cos M)\end{aligned}\right\} \tag{3-99}$$

§ 3.7 三维空间卫星轨道

本章前几节，研究卫星运动的轨道都是在轨道平面上讨论二维坐标，坐标系原点放在引力中心，用极坐标(r, θ)或用直角坐标(x, y 或 ξ, η)表示卫星的位置。

要在三维空间研究卫星轨道，先要选定坐标系，这个问题要随不同的研究对象，不同用途而定。例如，研究地球卫星轨道，坐标系原点可在地球质心A，Az轴指向北极，Ax轴指向春分点，Axy面取在赤道面上，称为赤道地心系；研究宇宙飞船轨道，则要取地心黄道系；研究月球则取日心赤道系，等等。在地心赤道系中，卫星的位置可以用直角坐标（x，y，z）表示，也可用球坐标（地心矢径r，赤纬δ，赤经α）表示。

由于观测者在地面，有时还要选取以测站为坐标原点的站心坐标系，站心坐标系的坐标轴可以取作与地心坐标系轴平行，也可以不平行，例如将ζ轴指向测站天顶。这就成为站心地平坐标系，等等。

关于各种适用的坐标系的确切定义及相互关系留待以后讨论，本节只说明地心赤道系和卫星轨道坐标系的相互转换关系。

3.7.1 卫星轨道根数

1. 设如图3-7所示，取某一空间坐标系$Axyz$，原点在引力中心A，各坐标轴在空间方向不变。$\vec{i}$，$\vec{j}$，$\vec{k}$分别表示Ax，Ay，Az轴上单位矢量。

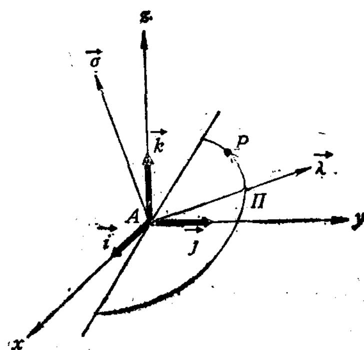


图 3-7

这里我们假定卫星运动轨迹不是圆，也不是直线，来研究任一时刻卫星位置的表示方法。

由(3-9)式可得

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}+K\frac{\vec{r}}{r^3}=0 \qquad (3\text{-}100)$$

可见，卫星的运动可由三个二阶微分方程来描述，方程组的阶数为6，显然，所求的卫星坐标（x，y，z）可表示为独立变量t和六个任意常数的函数形式，因此给定这六个常数，卫星的运动就随时可以完全确定。

选定这六个常数可以有不同的方法，但是分析起来，实际上只是确定两个量，一个是面积常矢量$\vec{\sigma}$（见(3-12)式），一个是拉氏常矢量$\vec{\lambda}$（见(3-37)式）。

确定卫星的三维位置可以分解为：确定它的轨道形状和大小，确定轨道在轨道面上的方位，确定卫星在轨道上相对于某一初始位置（或时间）的位置（或时间），以及确定轨道平面在所取空间坐标系中的位置。$\vec{\sigma}$正交于轨道面，故可确定轨道面的位置，如果$\vec{\sigma}$的三个坐标轴分量为$\vec{\sigma}_1$，$\vec{\sigma}_2$，$\vec{\sigma}_3$，则轨面方程即为

$$\sigma_1x+\sigma_2y+\sigma_3z=0 \qquad (3\text{-}101)$$

而轨道焦参数p和轨道偏心率e可由(3-44)式计算，即

$$p=\frac{\sigma^2}{K},\quad e=\frac{\lambda}{K} \qquad (3\text{-}102)$$

式中的σ及λ为矢量$\vec{\sigma}$及$\vec{\lambda}$的长度。

矢量$\vec{\lambda}$沿轨道拱线指向近地点，因此它能确定轨道在轨道面内的方位。我们由(3-38)式已经知道，$\vec{\sigma}$和$\vec{\lambda}$相互正交，因此它们的坐标分量σ_k、$\lambda_k(k=1, 2, 3)$必有以下关系：

$$\sigma_1\lambda_1+\sigma_2\lambda_2+\sigma_3\lambda_3=0 \tag{3-103}$$

σ_k和λ_k为我们提供了六个量，不过由于存在(3-103)式的关系，只有五个量独立。如果任取五个量再加上卫星过近地点时刻t_0，就可利用本章前几节的公式算出卫星在任一时刻t的位置。因此，这样六个能唯一确定卫星位置的量，称为卫星轨道根数。

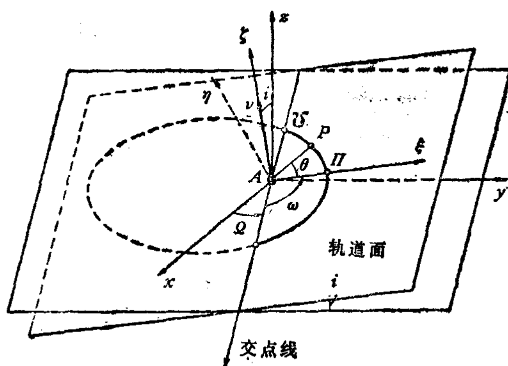


图 3-8

2. 现在说明其中一种选定根数的常用方法。如图3-8所示，坐标系原点选在地球质心，$Axyz$坐标系的xy面与地球赤道面重合，$A\xi\eta\zeta$坐标系的$\xi\eta$面与卫星轨道面重合，轨道面与赤道面一般不重合，而有交角，因此两面有一交线，此交线与轨道的交点一为升交点一为降交点，以卫星过交点后z坐标减小(降)或增大(升)而定。

在双曲线或抛物线轨道情形，只有一个交点，例如只有升交点，而降交点可以认为在无穷远。以后讨论问题我们把沿交点线由引力中心到升交点方向规定为正，于是坐标轴Ax与交点线正向之间的角，可称为升交点经度，如果Ax轴指向春分点，则为升交点赤经，若用Ω表示，则

$$0\leqslant\Omega<2\pi$$

若使$A\xi\eta\zeta$坐标系中$A\xi$轴指向近地点Π，沿ζ轴作单位矢量$\vec{\nu}$，显然，$\vec{\nu}$是轨道面的单位外法线矢量，它完全可描述轨面在空间的位置，$\vec{\nu}$和e轴之间的夹角i是轨道面与赤道面之间的交角，称为轨道倾角，它满足

$$0\leqslant i\leqslant\pi$$

因此用Ω和i两个量就可决定轨道面在空间的相对位置，但必须$i\neq0, \pi$。

轨道的形状可以用偏心率e描述，为了确定轨道的大小，还需一个线性量，例如焦参数p或近地心距r_π或者半长轴a(椭圆情形)，取定这两个参量，例如e, a，便可确定轨道的形状和大小。

为了确定轨道在轨面内的方位，可以用指向近地点的方向，即$A\xi$轴的方向来表示，用$A\xi$与交点线正向之间的角ω来确定，ω称为近升距，它满足

$$0\leqslant\omega<2\pi$$

再加一个过近地点时刻t_0，于是就有了六个量，即

$$\Omega, i, \omega, a, e, t_0$$

这就是常用的六个轨道根数。

2.7.2 轨道坐标系与赤道坐标系的转换

1. 六个轨道根数实际可以分为两组，Ω、i、ω 所起的作用是将 $A\xi\eta\zeta$ 坐标系转换为 $Axyz$ 坐标系的三个旋转角。

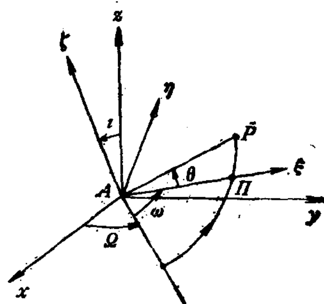


图 3-9

如图 3-9 所示，试将 Ax 轴绕AZ轴逆转（正向）一个 Ω 角，使 Ax 与交点线正向重合，再将AZ 轴绕 Ax 轴逆转一个 i 角，使 AZ 轴与 $A\zeta$ 轴重合，此时赤道面便与轨道面重合，最后再将 Ax 轴逆转一个 ω 角，使 Ax 与 $A\xi$ 重合。于是，两坐标系完全重合。

根数 a、e、t_0用于在轨道坐标系中求卫星的位置，但由于卫星在轨道面上运动，它的坐标 $\zeta\equiv 0$，所以只需进行二维解算，a，e决定轨道大小和形状，t_0决定卫星运动的初始时刻，t_0与所求时刻 t 组成时间间隔$\tau=t-t_0$，于是利用 a，e，τ 根据前几节所讲方法便可算出卫星的轨道坐标，例如(3-97)式

$$\left.\begin{aligned}\xi&=a(\cos E-e)\\ \eta&=b\sin E\\ \zeta&=0\end{aligned}\right\}\tag{3-104}$$

2. 两坐标系的转换问题。

显然，利用旋转矩阵可将上述三次绕轴旋转变换表示为

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}_3\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\tag{3-105}$$

逆变换式为

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}\tag{3-106}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}_1&=\begin{bmatrix}\cos\Omega & \sin\Omega & 0\\ -\sin\Omega & \cos\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{A}_2&=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos i & \sin i\\ 0 & -\sin i & \cos i\end{bmatrix}\\ \boldsymbol{A}_3&=\begin{bmatrix}\cos\omega & \sin\omega & 0\\ -\sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}\right\}\tag{3-107}$$

将上式中三个旋转角换成负值，即得矩阵 $\boldsymbol{B}_1$，$\boldsymbol{B}_2$，$\boldsymbol{B}_3$，于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_3=\begin{bmatrix}\cos\Omega & -\sin\Omega & 0\\ \sin\Omega & \cos\Omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos i & -\sin i\\ 0 & \sin i & \cos i\end{bmatrix}$$

$$\cdot\begin{bmatrix}\cos\omega & -\sin\omega & 0\\ \sin\omega & \cos\omega & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\Omega\cos\omega- & -\cos\Omega\sin\omega- & \sin\Omega\sin i\\ -\sin\Omega\sin\omega\cos i & -\sin\Omega\cos\omega\cos i & \\ \sin\Omega\cos\omega+ & -\sin\Omega\sin\omega+ & -\cos\Omega\sin i\\ +\cos\Omega\sin\omega\cos i & +\cos\Omega\cos\omega\cos i & \\ \sin i\sin\omega & \sin i\cos\omega & \cos i\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}P_x & Q_x & R_x\\ P_y & Q_y & R_y\\ P_z & Q_z & R_z\end{bmatrix}\tag{3-108}$$

因此由式(3-106)可得

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_x & Q_x & R_x\\ P_y & Q_y & R_y\\ P_z & Q_z & R_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}\tag{3-109}$$

因为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}^T$$

所以得

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}P_x & P_y & P_z\\ Q_x & Q_y & Q_z\\ R_x & R_y & R_z\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\tag{3-110}$$

3. 由开普勒方程(3-79)式

$$E-e\sin E=n(t-t_0)$$

及(3-78)式

$$n=\sqrt{K/a^3}$$

可求得任一时刻 t 的 E，又可由 a，e 算出 $b=a\sqrt{1-e^2}$，于是可算出卫星在此时刻的轨道坐标系中的坐标为

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(\cos E-e)\\ b\sin E\\ 0\end{bmatrix}\tag{3-111}$$

以及

$$\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{bmatrix}$$

或者

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} a(\cos E - e) + \begin{bmatrix} Q_x \\ Q_y \\ Q_z \end{bmatrix} b\sin E \tag{3-112}$$

§3.8 计算轨道根数的方法和原理

上节已经讲过如何在已知轨道根数情况下计算任一时刻卫星的位置，本节要讲的是相反的问题，即：根据观测已知的卫星位置如何计算轨道根数。

3.8.1 观测卫星几个位置计算轨道根数

参见图 3-10，为了求出六个轨道根数，一般有 P_1 及 P_2 两个卫星位置及时刻就够了，如果已知三个星位，以及过其中一个星位的时刻，计算就可以简化。

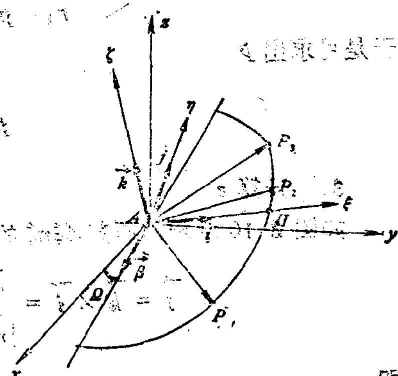


图 3-10

1. 计算 Ω、i

设如图，P_1、P_2、P_3 为三个卫星位置，相应时刻为 t_1、t_2、t_3，径矢为 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$、$\vec{r}_3$、并且 $t_1 < t_2 < t_3$。我们假定，引力中心 A 不位于任意两个星位的联线（即 $\overline{P_1P_2}$ 或 $\overline{P_1P_3}$ 或 $\overline{P_2P_3}$）上。

已知 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$、$\vec{r}_3$，可求出轨道法向单位矢量 $\vec{k}$，即

$$\vec{k} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 \times \vec{r}_3|} \tag{3-113}$$

这个单位矢量在 $A\xi\eta\zeta$ 坐标系中的坐标分量是

$$\xi = \eta = 0, \quad \zeta = 1$$

而它在 $Axyz$ 坐标系中的坐标分量是

$$\vec{k} = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\Omega\sin i \\ -\cos\Omega\sin i \\ \cos i \end{bmatrix} \tag{3-114}$$

如果 $i \neq 0$，则由式(3-113)及(3-114)比较同名的 $\vec{k}$ 分量，便可求出 Ω 及 i。

2. 计算 p

由于 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$、$\vec{r}_3$ 共面，而且彼此不共线，故应有实常数 c_1 及 c_3 满足下式

$$\vec{r}_2 = c_1\vec{r}_1 + c_3\vec{r}_3 \tag{3-115}$$

为了求出这两个常数，可由上式分别矢乘 $\vec{r}_3$ 及 $\vec{r}_1$ 得

$$\left.\begin{aligned} \vec{r}_2 \times \vec{r}_3 &= c_1(\vec{r}_1 \times \vec{r}_3) \\ \vec{r}_2 \times \vec{r}_1 &= c_3(\vec{r}_3 \times \vec{r}_1) \end{aligned}\right\} \tag{3-116}$$

便可分别算出 c_1 和 c_3。

由轨道方程(3-45)式

$$r=p/(1+e\cos\theta)$$

可得

$$p-r=e(r\cos\theta)=e\xi \tag{3-117}$$

式中 ξ 是矢量 $\vec{r}$ 在 ξ 轴(拱轴)上投影的长度 $\left(\theta>\frac{\pi}{2}\text{时},\xi\text{为负}\right)$，若用 ξ_1、ξ_2、ξ_3 分别表示 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$、$\vec{r}_3$ 的这种投影长度，则由式(3-115)可知

$$\xi_2=c_1\xi_1+c_3\xi_3$$

将上式乘以 e，再顾及(3-117)式，便得

$$r_2-p=c_1(r_1-p)+c_3(r_3-p) \tag{3-118}$$

于是可求出 p

$$p=\frac{r_2-c_1r_1-c_3r_3}{1-c_1-c_3} \tag{3-119}$$

3. 计算 e

如图 3-10 所示，研究 $A\xi\eta\zeta$ 的三个坐标轴单位矢量，顾及(3-113)式，可知

$$\vec{j}=\vec{k}\times\vec{i}=\frac{\vec{r}_1\times\vec{r}_3}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_3|}\times\vec{i}=\frac{\vec{r}_3(\vec{i}\cdot\vec{r}_1)-\vec{r}_1(\vec{i}\cdot\vec{r}_3)}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_3|}$$

即

$$\vec{j}=\frac{1}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_3|}(\xi_1\vec{r}_3-\xi_3\vec{r}_1) \tag{3-120}$$

将上式两边乘以 $e|\vec{r}_1\times\vec{r}_3|$，并顾及(3-117)式，得

$$e|\vec{r}_1\times\vec{r}_3|\vec{j}=(p-r_1)\vec{r}_3-(p-r_3)\vec{r}_1 \tag{3-121}$$

于是便可求出 e，即

$$e=|(p-r_1)\vec{r}_3-(p-r_3)\vec{r}_1|\cdot\frac{1}{|\vec{r}_1\times\vec{r}_3|} \tag{3-122}$$

4. 计算 ω

由(3-113)及(3-121)式算出 $\vec{k}$ 及 $\vec{j}$，然后求出 $\vec{i}$ 为

$$\vec{i}=\vec{j}\times\vec{k} \tag{3-123}$$

如图 3-10 所示，交点线正向上的单位矢量 $\vec{\beta}$ 和 $Axyz$ 坐标系的 x，y 轴上单位矢量 $\vec{I}$ 及 $\vec{J}$ 有如下关系

$$\vec{\beta}=(\cos\Omega)\vec{I}+(\sin\Omega)\vec{J} \tag{3-124}$$

故可算出 $\vec{\beta}$，然后可由 $\vec{\beta}$ 与 $\vec{i}$ 求出两者的夹角 ω。

5. 计算时刻 t_0(椭圆运动情形)

考虑如图 3-10 的情况，卫星过 p_2 位置的时刻为 t_2，此时相应的偏近点角为 E，则有

$$\vec{r}_2 = a(\cos E_2 - e)\vec{i} + (b\sin E_2)\vec{j} \tag{3-125}$$

由于p和e已经求得，故可算得a及b为

$$a = p/(1-e^2),\ b^2 = a^2(1-e^2)$$

于是由(3-125)式得

$$\left.\begin{aligned} a(\cos E_2 - e) &= \vec{r}_2 \cdot \vec{i} \\ b\sin E_2 &= \vec{r}_2 \cdot \vec{j} \end{aligned}\right\} \tag{3-126}$$

求出E_2再用开普勒方程

$$E_2 - e\sin E_2 = n(t_2 - t_0) \tag{3-127}$$

就不难求出t_0。

到此，六个根数就已全部求出。

3.8.2 观测卫星一个位置及速度计算轨道根数

1． 设已知卫星在t_1时刻的径矢$\vec{r}_1$和速度$\vec{v}_1$，则轨面法向单位矢量$\vec{k}$就可算出：

$$\vec{k} = \frac{\vec{r}_1 \times \vec{v}_1}{|\vec{r}_1 \times \vec{v}_1|} \tag{3-128}$$

因此类似上节(3-113)和(3-114)式不难求出Ω、i。

2． 由开普勒第二定律，面积积分常矢量$\vec{\sigma}$应为(参见(3-12)式)

$$\vec{r}_1 \times \vec{v}_1 = \vec{\sigma},\ |\vec{r}_1 \times \vec{v}_1| = \sigma \tag{3-129}$$

算出σ后，便可求出p为

$$p = \frac{\sigma^2}{K} \tag{3-130}$$

K为引力常数，也已知。

3． 先按下式计算能量常数h(参见(3-34))。

$$h = v_1^2 - 2K/r_1$$

然后求出e为

$$e = \sqrt{1 + h\frac{\sigma^2}{K^2}} \tag{3-131}$$

4． 令$\vec{\Delta}$为$\vec{r}_1$的单位矢量，则$\vec{v}_1$的径向和横向分量v_{1r}和v_{1s}可写为

$$\left.\begin{aligned} v_{1r} &= \vec{v}_1 \cdot \vec{\Delta} \\ v_{1s} &= \vec{v}_1 - v_{1r} \cdot \vec{\Delta} \end{aligned}\right\} \tag{3-132}$$

由轨道方程$r_1 = p/(1+e\cos\theta_1)$，可求得$\theta_1$以及径向速度分量$v_{1r}$为

$$v_{1r} = \frac{\sigma}{p} e\sin\theta_1 \tag{3-133}$$

交点线正向的单位矢量$\vec{\beta}$可用已算出的Ω来求(参见(3-124)式)。

为了求出 ω，可先求出 $(\omega+\theta_1)$，这是两个单位矢量 $\vec{\Delta}$ 和 $\vec{\beta}$ 之间的夹角，所以有

$$\left.\begin{aligned}\vec{\beta}\cdot\vec{\Delta}&=\cos(\omega+\theta_1)\\ \vec{\beta}\times\vec{\Delta}&=\sin(\omega+\theta_1)\cdot\vec{k}\end{aligned}\right\}\tag{3-134}$$

式中的 $\vec{k}$ 由(3-128)式算出，由上式可唯一地求出 $(\omega+\theta_1)$，并满足以下不等式

$$\theta_1\leqslant(\omega+\theta_1)\leqslant\theta_1+2\pi$$

于是可由 θ_1 及 $\omega+\theta_1$ 求出 ω。

5. 计算 t_0，先求 E_1，有

$$\operatorname{tg}\frac{E_1}{2}=\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}$$

再由

$$E_1-e\sin E_1=n(t-t_0)$$

解出 t_0。

3.8.3 计算卫星初轨的高斯法

高斯法适用于已知卫星的两个位置 $\vec{r}_1$，$\vec{r}_2$，且相互间隔弧段不大（<75°）的情形。用这个方法计算初轨迭代收敛较快且精度较高。

根据本章前几节讲过的内容，本节要将有些公式稍加变换，并结合具体算例加以说明。

1. 设在 t_1、t_2 时刻观测到已知卫星的位置矢量为 $\vec{r}_1$、$\vec{r}_2$，此两矢量在轨道平面上构成扇形面积 s 和相应的三角形面积 s'，两面积之比用 A_s 表示，则参阅式(3-29)，(3-44)可求得

$$A_s=\frac{s}{s'}=\frac{\sqrt{PK}\,(t_2-t_1)}{r_2r_1\sin(\theta_2-\theta_1)}\tag{3-135}$$

再由轨道方程(3-45)式可得

$$p\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right)=2+e(\cos\theta_2+\cos\theta_1)=2+2e\cos\left(\frac{\theta_2+\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\tag{3-136}$$

为了消去含 $\frac{1}{2}(\theta_2+\theta_1)$ 的因子，利用下列关系：

$$\left.\begin{aligned}&\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{r(1+\cos\theta)}{2}},\quad\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{r(1-\cos\theta)}{2}}\\&r\cos\theta=a(\cos E-e),\quad r\sin\theta=a\sqrt{1-e^2}\sin E\\&\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2}=\sqrt{a(1-e)}\cos\frac{E}{2},\quad\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{a(1+e)}\sin\frac{E}{2}\\&\sqrt{r_1r_2}\cos\left(\frac{\theta_1\pm\theta_1}{2}\right)=\left[\sqrt{r_2}\cos\frac{\theta_2}{2}\right]\left[\sqrt{r_1}\cos\frac{\theta_1}{2}\right]\\&\qquad\mp\left[\sqrt{r_2}\sin\frac{\theta_2}{2}\right]\left[\sqrt{r_2}\sin\frac{\theta_1}{2}\right]\end{aligned}\right\}\tag{3-137}$$

经变换并整理后可得

$$p\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right)=2+\frac{2p}{\sqrt{r_2r_1}}\cos\left(\frac{E_2-E_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)-2\cos^2\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right) \tag{3-138}$$

再用(3-135)式表示p并代入上式，得

$$A_s^2=\frac{k(t_2-t_1)^2\sec^2\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}{2r_1r_2\left[r_1+r_2-2\sqrt{r_1r_2}\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{E_2-E_1}{2}\right)\right]} \tag{3-139}$$

令

$$l=\left[\frac{r_1+r_2}{4\sqrt{r_1r_2}\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)}\right]-\frac{1}{2} \tag{3-140}$$

$$m=\frac{K(t_2-t_1)^2}{\left[2\sqrt{r_1r_2}\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)\right]^3} \tag{3-141}$$

$$D=\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{E_2-E_1}{2}\right)\right]=\sin^2\left(\frac{E_2-E_1}{4}\right) \tag{3-142}$$

代入(3-139)式整理后可得

$$A_s^2=m/(l+D) \tag{3-143}$$

再对t_1、t_2两时刻分别写出开普勒方程，并组成

$$\frac{\sqrt{K}(t_2-t_1)}{a^{3/2}}=E_2-E_1-2e\sin\left(\frac{E_2-E_1}{2}\right)\cos\left(\frac{E_2+E_1}{2}\right) \tag{3-144}$$

用(3-137)式的关系对因子$e\cos\left(\frac{E_2+E_1}{2}\right)$和$\sin\left(\frac{E_2-E_1}{2}\right)$稍加变换，可得

$$(t_2-t_1)=\frac{a^{3/2}}{\sqrt{K}}[E_2-E_1-\sin(E_2-E_1)]+\frac{r_1r_2\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sqrt{PK}} \tag{3-145}$$

将(3-135)式写成$\frac{1}{A_s}$形式，再用上式表示出$\sin(\theta_2-\theta_1)$，代入$\frac{1}{A_s}$中，可求得

$$1-\frac{1}{A_s}=\frac{a^{3/2}}{(t_2-t_1)\sqrt{K}}[E_2-E_1-\sin(E_2-E_1)] \tag{3-146}$$

又因

$$\sin(\theta_2-\theta_1)=\frac{2\sqrt{ap}}{\sqrt{r_1r_2}}\sin\left(\frac{E_2-E_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{2}\right)$$

故又可将(3-135)式写为

$$A_s = \frac{\sqrt{K}(t_2 - t_1)}{2\sqrt{a}\ \sqrt{r_1 r_2}\sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)} \tag{3-147}$$

由(3-146)和(3-147)式消去a，得

$$A_s^2\left(1 - \frac{1}{A_s}\right) = m\left[\frac{E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)}{\sin^3\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)}\right] = mH \tag{3-148}$$

或

$$A_s^2(A_s - 1) = mH \tag{3-149}$$

再将(3-143)式代入上式，便得

$$A_s = 1 + H(l + D) \tag{3-150}$$

2．在高斯法中，计算A_s是最重要的步骤，但H，l，D中仍含未知的E和θ，不过上式第二项很小，A_s近于1，可用迭代法计算，θ虽未知，但可用两个时刻的卫星位置求出$(\theta_2 - \theta_1)$为

$$\cos(\theta_2 - \theta_1) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{r_1 r_2} \tag{3-151}$$

迭代时先设$A_s = 1$，则由(3-143)式

$$D = \left(\frac{m}{A_s^2} - l\right) = m - l \tag{3-152}$$

可算出近似的D值，代入(3-142)式，可得

$$\cos\frac{1}{2}(E_2 - E_1) = 1 - 2D \tag{3-153}$$

再求出H，从而可代入(3-150)式算出稍精确的A_s，然后再代入(3-152)式求更精确的D，如此重复，直到A_s收敛在预定精度内。

3．将求出的A_s代入(3-147)式，计算出a，然后再用来求卫星在观测时刻的速度，为此先计算两个系数：

$$\left.\begin{aligned} f &= 1 - \frac{a}{r_1}[1 - \cos(E_2 - E_1)] \\ g &= (t_2 - t_1) - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{K}}[E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)] \end{aligned}\right\} \tag{3-154}$$

然后利用

$$\vec{r}_2 = f\vec{r}_1 + g\dot{\vec{r}}_1$$

或

$$\dot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{r}_2 - f\vec{r}_1}{g} \tag{3-155}$$

求出$\dot{\vec{r}}_1$。有了$\dot{\vec{r}}_1$和$\vec{r}_1$，便可计算出卫星初轨根数。计算公式与上节所列虽有不同，但不难理解。

4. 算例

设 1976 年 12 月 23 日在世界时两个时刻测算得某卫星的坐标分别是：

$$t_1 = 3\text{h}58.8515\text{min} \qquad t_2 = 4\text{h}17.8152\text{min}$$

$$x_1 = +0.41136\text{min} \qquad x_2 = +0.97757\text{min}$$

$$y_1 = -1.66250\text{min} \qquad y_2 = -1.64428\text{min}$$

$$z_1 = +0.82272\text{min} \qquad z_2 = -0.042363\text{min}$$

坐标以地球赤道半径 $a_e = 6378150\text{m}$ 为单位。试用高斯法计算此卫星初轨。

（1）仿§3.4 的方法，取 $a_e = 1, M_e = 1, K = 1$，因而要将时间单位换成 $13.4470524min = \frac{1}{0.07436574}$。于是用新时间单位表示的两观测时刻的间隔 τ 应为：

$$\tau = 0.07436574 \times 18.9637 = 1.410245$$

算出 r_1，r_2 及 $(\theta_2 - \theta_1)$ 的数值为

$$r_1 = 1.899998,\ r_2 = 1.913399$$

$$\theta_2 - \theta_1 = 31°27'53.6''$$

（2）求 l、m

$$l = 0.019463 \qquad m = 0.0402168$$

计算时注意 m 式中的 $K = 1$，并用 τ^2 代换 $(t_2 - t_1)^2$。

（3）迭代求 A_e

已迭代三次，得 $A_e = 1.05$，再算一次，得 $A_e = 1.04968$，可以停止迭代，用此作为最后值。计算中应注意求 A_e 的式中有与 m 式类似的情况。求 H 时，(3-148)式中的 $E_2 - E_1$ 应先化为弧度再参加运算。最后的 $E_2 - E_1 = 29°59'59.5'' = 0.523596\text{rad}$。

（4）求 a，f，g

$$a = 2.000106,\ f = +0.858968,\ g = +1.343494$$

按(3-154)式计算 g 时取 $K = 1$，时刻差用 τ。

（5）计算卫星运动速度

按(3-155)式先计算速度的三个分量，即

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{1}{g}(x_2 - f x_1) = +0.464627 \\ \dot{y}_1 &= \frac{1}{g}(y_2 - f y_1) = -0.160958 \\ \dot{z}_1 &= \frac{1}{g}(z_2 - f z_1) = -0.557537 \end{aligned}\right\} \tag{3-156}$$

最后得

$$|\dot{\vec{r}}_1|^2 = v_1^2 = 0.552633$$

$$|\dot{\vec{r}}_1| = v_1 = 0.743393$$

$$|\vec{r}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1| = +0.00002$$

（6）计算轨道根数

第一步，先求 E_1，e，

因由§3.5的有关公式可求得(注意 $K=1$)

$$r=a(1-e\cos E),\quad v^2=K\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} 1-e\cos E_1&=2-r_1v_1^2=0.949998 \\ e\cos E_1&=0.050002 \\ e\sin E_1&=\frac{|\vec{r}_1\ \dot{\vec{r}}_1|}{\sqrt{a}}=0.00001414 \end{aligned}\right\} \tag{3-157}$$

平方上两式，可得

$$e^2=0.002500 \qquad e=0.050002$$

同时又可得

$$\mathrm{tg}\,E_1=0.0002828 \qquad E_1=0.0162032=58.3''$$

第二步，求 M_1，t_0，

先求平近点角 $M_1=E_1-e\sin E_1$，然后计算平均运动速度 n，最后求过近地点时刻 t_0，计算 n 时要注意时间单位。有

$$M_1=0°00'61.2''=360°01'01.2''=6.283482011\text{rad}$$

$$n=\sqrt{\frac{K}{a^3}}=0.353525285 \qquad (\sqrt{K}=1)$$

$$=0.026290169/\text{min} \qquad (\text{乘以}0.07436574)$$

$$\frac{M_1}{n}=239.0050\text{min}$$

因此卫星过近地点时刻应为

$$t_0=t_1-\left(\frac{M_1}{n}\right)=-0.1535\text{min} \tag{3-158}$$

这个结果说明卫星过近地点时刻是在观测当日世界时零时之前，即12月22日 $23^h59.8465$ min。此卫星的绕地周期为 $\frac{2\pi}{n}=238.99372$m。

第三步，计算 ω、i 和 Ω

根据轨道面和赤道面上有关量的几何关系，可将这三个角表示为：

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{tg}\,\omega=\frac{A_3}{B_3} \quad \sin i=\frac{A_3}{\sin\omega}=\frac{B_3}{\cos\omega} \\ &\mathrm{tg}\,\Omega=\frac{A_2\cos\omega-B_2\sin\omega}{A_1\cos\omega-B_1\sin\omega} \end{aligned}\right\} \tag{3-159}$$

其中：

$$
\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{x_1}{r_1}\cos E_1 - \sqrt{a}\,\dot{x}_1 \sin E_1 \\
A_2 &= \frac{y_1}{r_1}\cos E_1 - \sqrt{a}\,\dot{y}_1 \sin E_1 \\
A_3 &= \frac{z_1}{r_1}\cos E_1 - \sqrt{a}\,\dot{z}_1 \sin E_1 \\
B_1 &= \left[\frac{x_1}{r_1}\sin E_1 + \sqrt{a}\,\dot{x}_1(\cos E_1 - e)\right]\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \\
B_2 &= \left[\frac{y_1}{r_1}\sin E_1 + \sqrt{a}\,\dot{y}_1(\cos E_1 - e)\right]\frac{1}{\sqrt{1-e^2}} \\
B_3 &= \left[\frac{z_1}{r_1}\sin E_1 + \sqrt{a}\,\dot{z}_1(\cos E_1 - e)\right]\frac{1}{\sqrt{1-e^2}}
\end{aligned}\right\} \tag{3-160}
$$

算得

$\operatorname{tg}\omega = -0.5773955$　　　　$\omega = 149°59'53''$

$\sin i = 0.866016 = 0.866017$　　　　$i = 59°59'56.1'' = 59°59'56.5''$

平均　　　　$i = 59°59'56.3''$

$\operatorname{tg}\Omega = -1.732046$　　　　$\Omega = 120°00'00.2''$

第四步，单位化算

由于本例计算中长度以 $a_e = 6378150\text{m}$ 为单位，时间以13.4470524min为单位，故凡与长度、时间有关的量最后都需化算为常用单位，例如计算速度时，应将计算结果乘以：

$$
\frac{6378.150}{13.4470524\times 60} = 7.905264055
$$

所得数值以 km/s 为单位。余同理。

§3.9 受摄轨道

本章前几节描述卫星的运动都是假定卫星只受引力中心的力作用，因而运动轨道是平面曲线，六个轨道根数是常数，但是实际上并非如此理想，卫星运动所受的作用力是多种因素共同作用所形成的合力，除了指向引力中心的力之外，还有引力中心体地球的非球形结构及质量分布产生的引力，大气阻力，其他天体（如日、月）的引力，卫星在地球磁场中运动产生的电磁力，太阳以及地球对卫星的辐射压力，等等。这些力有的是引力性质的力，有的则不是，但都影响着卫星的运动，不过由于起主要作用的仍是中心引力，其他的力相对地要小得多，因此可以将作用于卫星的各种力归结为两个力之和，即

$$
\vec{E} = \vec{F}_r + \vec{F}_s
$$

其中 F_r 是中心引力，F_s 称为摄动力，由摄动力产生的卫星运动加速度称为摄动加速度，设用 $\vec{\phi}$ 表示，则卫星运动方程应为

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{K}{r^2}\vec{r} + \vec{\phi} \tag{3-161}$$

若$\vec{\phi}=0$，则卫星运动就是前述的开普勒运动，轨道为平面圆锥曲线，六个轨道根数是常数。

如果$\vec{\phi}\neq 0$，轨道一般就不是平面曲线，轨道根数就会是变数，是时间函数，可以表示为

$$\Omega(t),\ i(t),\ \omega(t),\ e(t),\ a(t),\ \tau(t)$$

其中$a(t)$常可表示为$p(t)$，p是焦参数；$\tau(t)$常表示为$M_0(t)$，$\tau=t-t_0$，M_0是t_0时卫星的平近点角。

显然，由于这六个轨道根数随时间变化，这意味着轨道的大小形状在变化，或放大，或缩小，或变形，或在空间转动扭挠，轨道曲线就不会是平面曲线，严格地讲也无所谓轨道平面。下面我们来分析这种轨道的性质。

3.9.1 密切轨道与运动方程

由前面的讨论可知，由于摄动力的存在，卫星轨道一般不会严格是平面的圆锥截线，不过由于摄动力相对较小，因此可以设想，在某时刻t摄动力突然消失，此时之后卫星运动轨道仍为某个圆锥截线，t时刻的六个轨道根数就是此圆锥截线轨道的轨道根数，为了讨论简便，我们下面仍就椭圆轨道情况来分析。

这个瞬时的轨道常称为密切轨道，或密切椭圆，意即在密切平面上形成的轨道，但不同时刻有不同的密切平面，也就有不同的密切椭圆，形成一族曲线，都和真实轨迹共切，因而真实轨迹是这族曲线的包络线。

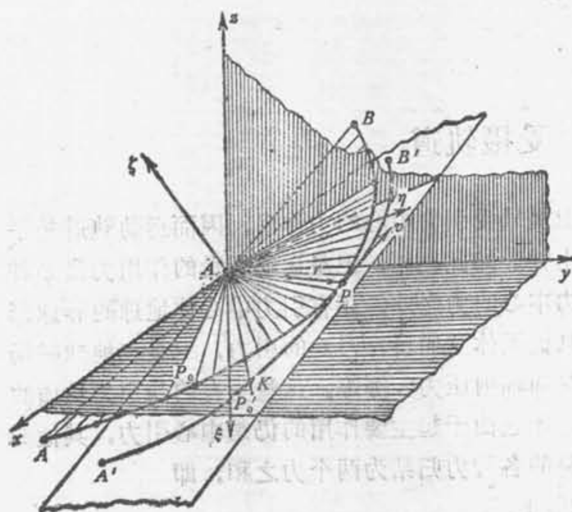


图 3-11

图 3-11 表示引力中心为A，卫星绕A运动，假定卫星先是在P_0位置处的密切平面AP_0B'上运动到P点，此时径矢为$\vec{r}$，由于摄动作用，其轨迹不再是PB'而是在P位置的密切平面$A'PB$上的PB，这就好象密切平面AP_0P绕P位置的$\vec{r}$作了一个微小的转动而成为另一密切平面$A'PB$。这种转动不断发生，位置P_0，P，…无限靠近，这样，我们就可把卫星沿真实轨道的运动分解为沿密切椭圆的运动和密切椭圆平面绕瞬时径矢的转动这两部分。虽然这种处理方法是近似的，但很直观。

下面先来推导密切轨道根数随时间变化的表示式。

如图 3-11 所示，取不动坐标系 $Axyz$，动坐标系 $A\xi\eta\zeta$，并令 ξ 轴始终与卫星径矢重合，随卫星运动，在 ξ、η、ζ 轴上分别用 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ 表示单位矢量，如果将卫星的速度矢量 $\vec{v}$ 分解为径向分量 $\vec{v}_r$ 和横向（垂直于径矢）分量 $\vec{v}_n$，显然 $\vec{e}_2$ 就在 $\vec{v}_n$ 方向，而 $\vec{e}_3=\vec{e}_1\times\vec{e}_2$，这三个单位矢量在坐标原点 A 形成了一个三面角，用 $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ 表示，我们可以把它设想为一个刚体，它跟随卫星在空间运动。

如果将 (3-161) 式中的摄动加速度 $\vec{\phi}$ 沿 ξ，η，ζ 轴分解，得 ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3，显然也分别在 $\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$ 方向上。

设在时刻 t_1 摄动力消失，用此时的密切轨道根数可计算卫星的位置和速度，首先

$$\vec{r}=r\vec{e}_1 \tag{3-162}$$

其中

$$r=p/(1+e\cos\theta) \tag{3-163}$$

$$\vec{v}=v_r\vec{e}_1+v_n\vec{e}_2 \tag{3-164}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} v_r&=\sqrt{\frac{K}{p}}e\sin\theta\\ v_n&=\sqrt{\frac{K}{p}}(1+e\cos\theta)=\frac{1}{r}\sqrt{Kp}\end{aligned}\right\} \tag{3-165}$$

无摄动力时，以上各式中仅 θ 随时间改变，e，p 均不变。

但在有摄动力存在时，不同时刻就有不同的密切轨道，虽然每一时刻都可用相应密切根数按上列各式计算卫星的位置（径矢）和速度，但各式中不仅 θ 是变量，e，p 也是变量。

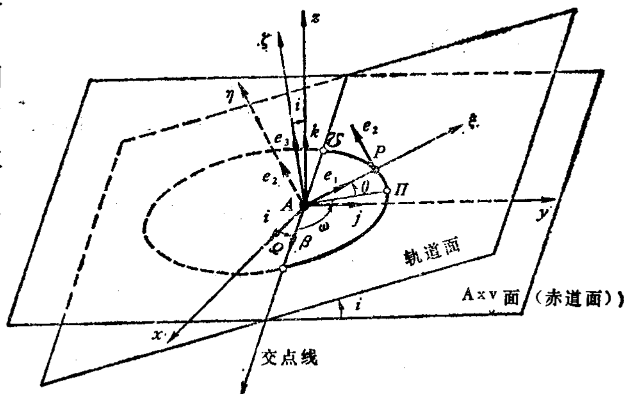


图 3-12

若将(3-164)式写为

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=v_r\vec{e}_1+v_n\vec{e}_2 \tag{3-166}$$

对于任何时刻都正确，所以将其对 t 微分，并顾及(3-161)式得

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d}{dt}(v_r\vec{e}_1+v_n\vec{e}_2)=-\frac{K}{r_2}\vec{e}_1+\vec{\phi} \tag{3-167}$$

由(3-162)及(3-166)式可知

$$\frac{d(r\vec{e}_1)}{dt}=v_r\vec{e}_1+v_n\vec{e}_2 \tag{3-168}$$

(3-167)及(3-168)这两个矢量方程实际上就是卫星摄动运动微分方程。下面我们先将它们换成六个标量表示式，用密切轨道根数及其一阶微商表示，然后求出称为牛顿—拉格朗日方程的运动微分方程。

1. 标量表示式

由(3-168)及(3-167)式可得

$$r\frac{d\vec{e}_1}{dt}+\frac{dr}{dt}\vec{e}_1=v_r\vec{e}_1+v_n\vec{e}_2 \tag{3-169}$$

$$v_r\frac{d\vec{e}_1}{dt}+\frac{dv_r}{dt}\vec{e}_1+v_n\frac{d\vec{e}_2}{dt}+\frac{dv_n}{dt}\vec{e}_2=-\frac{K}{r_2}\vec{e}_1+\vec{\phi} \tag{3-170}$$

由于三面角$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$的瞬时转动角速度$\vec{\omega}$可写为

$$\vec{\omega}=\omega_1\vec{e}_1+\omega_2\vec{e}_2+\omega_3\vec{e}_3 \tag{3-171}$$

而

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1}{dt}&=\vec{\omega}\times\vec{e}_1\\ \frac{d\vec{e}_2}{dt}&=\vec{\omega}\times\vec{e}_2\\ \frac{d\vec{e}_3}{dt}&=\vec{\omega}\times\vec{e}_3\end{aligned}\right\} \tag{3-172}$$

将式(3-171)代入上式，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_1}{dt}&=-\omega_2\vec{e}_3+\omega_3\vec{e}_2\\ \frac{d\vec{e}_2}{dt}&=+\omega_1\vec{e}_3-\omega_3\vec{e}_1\\ \frac{d\vec{e}_3}{dt}&=-\omega_1\vec{e}_2+\omega_2\vec{e}_1\end{aligned}\right\} \tag{3-173}$$

将上式代入(3-169)及(3-170)式，并按同一单位矢量系数相等的原则，即可求出六个标量表示式如下：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dr}{dt}=v_r\\ &r\omega_3=v_n\\ &\omega_2=0\\ &\frac{dv_r}{dt}-v_n\omega_3=-\frac{K}{r_2}+\phi_1\\ &v_r\omega_3+\frac{dv_n}{dt}=\phi_2\\ &-v_r\omega_2+v_n\omega_1=\phi_3\end{aligned}\right\} \tag{3-174}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_1=\frac{\phi_3}{v_n},\ \omega_2=0,\ \omega_3=\frac{v_n}{r}\\
&\frac{dr}{dt}=v_r\\
&\frac{dv_r}{dt}=\frac{v_n^2}{r}-\frac{K}{r}+\phi_1\\
&\frac{dv_n}{dt}=-\frac{v_r v_n}{r}+\phi_2
\end{aligned}\right\}\tag{3-175}$$

2. 用密切根数及其微商的表示式

如果将（$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$）的瞬时转动角速度$\vec{\omega}$用另外三个轴上的分量（$\vec{\omega}$始终与径矢$\vec{r}$共线，参见图 3-11）表示，即

$$\vec{\omega}=\frac{d\Omega}{dt}\vec{k}+\frac{di}{dt}\vec{\beta}+\frac{du}{dt}\vec{e}_3\tag{3-176}$$

式中$u=\omega+\theta$，即近升距ω与真近点角θ之和，是轨道面上的量(注意这里的ω勿与角速度混淆)。

由于$\vec{\beta}$位于$\vec{e}_1$及$\vec{e}_2$所在平面上，若将$\vec{\beta}$逆时针转过u角即与$\vec{e}_1$重合，再转90°即与$\vec{e}_2$重合，因此有

$$\vec{\beta}=(\cos u)\vec{e}_1-(\sin u)\vec{e}_2\tag{3-177}$$

再将$\vec{k}$沿$\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$分解，可得

$$\vec{k}=c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3\tag{3-178}$$

其中各系数c待定。

因$\vec{k}$与$\vec{e}_3$的夹角为i，故得

$$c_3=\cos i\tag{3-179}$$

为了求c_1及c_2，将(3-212)式乘以$\vec{e}_3$，得

$$\vec{k}\times\vec{e}_3=-c_1\vec{e}_2+c_2\vec{e}_1\tag{3-180}$$

但因$\vec{\beta}$与$\vec{k}$、$\vec{e}_3$均正交，故知

$$\vec{k}\times\vec{e}_3=(\sin i)\vec{\beta}\tag{3-181}$$

因此由式(3-177)、(3-180)及(3-181)可得

$$c_1=\sin i\sin u,\ c_2=\sin i\cos u$$

于是

$$\vec{k}=(\sin i\sin u)\vec{e}_1+(\sin i\cos u)\vec{e}_2+(\cos i)\vec{e}_3\tag{3-182}$$

将式(3-182)和(3-177)代入式(3-176)，便得($\vec{e}_1$，$\vec{e}_2$，$\vec{e}_3$)的瞬时转动角速度在动坐标轴上的分量，用密切根数微商表示的表示式为

$$
\left.\begin{aligned}
\omega_1 &= \sin i \sin u \frac{d\Omega}{dt} + \cos u \frac{di}{dt} \\
\omega_2 &= \sin i \cos u \frac{d\Omega}{dt} - \sin u \frac{di}{dt} \\
\omega_3 &= \cos i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{du}{dt}
\end{aligned}\right\} \tag{3-183}
$$

3. 牛顿-拉格朗日运动微分方程

先利用(3-175)的头三式及(3-183)式求$\frac{d\Omega}{dt}$，$\frac{di}{dt}$，$\frac{du}{dt}$的表示式，有

$$
\left.\begin{aligned}
&\sin i \sin u \frac{d\Omega}{dt} + \cos u \frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{Kp}} \phi_3 \\
&\sin i \cos u \frac{d\Omega}{dt} - \sin u \frac{di}{dt} = 0 \\
&\cos i \frac{d\Omega}{dt} + \frac{du}{dt} = \frac{1}{r^2} \sqrt{Kp}
\end{aligned}\right\} \tag{3-184}
$$

由上式前两式可得

$$
\frac{d\Omega}{dt} = \frac{r}{\sqrt{Kp}} \frac{\sin u}{\sin i} \phi_3 \tag{3-185}
$$

$$
\frac{di}{dt} = \frac{r}{\sqrt{Kp}} \cos u \cdot \phi_3 \tag{3-186}
$$

再由第三式得

$$
\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{Kp}}{r^2} - \frac{r}{\sqrt{Kp}} \sin u \operatorname{ctg} i \cdot \phi_3 \tag{3-187}
$$

由于$u = \omega + \theta$，故由上式可得

$$
\frac{d\theta}{dt} = -\frac{d\omega}{dt} + \frac{\sqrt{Kp}}{r^2} - \frac{r}{\sqrt{Kp}} \sin u \operatorname{ctg} i \cdot \phi_3 \tag{3-188}
$$

上面的(3-185)及(3-186)式就是所求六个方程中的两个，求其余四个要用到(3-188)式，下面先求三个，即

$$
\frac{d\omega}{dt}, \ \frac{dp}{dt}, \ \frac{de}{dt}.
$$

将(3-175)式的后三式用(3-163)及(3-165)式代入，得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \sqrt{\frac{K}{p}} e \sin\theta \\
\frac{dv_r}{dt} &= \frac{K}{r^2} e \cos\theta + \phi_1 \\
\frac{dv_n}{dt} &= -\frac{K}{r^2} e \sin\theta + \phi_2
\end{aligned}\right\} \tag{3-189}
$$

由于r，v_r，v_n是θ，e，p的函数，而θ、e，p又是时间t的函数，所以

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial r}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial r}{\partial e}\frac{de}{dt} \\
\frac{dv_r}{dt} &= \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial v_r}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial v_r}{\partial e}\frac{de}{dt} \\
\frac{dv_n}{dt} &= \frac{\partial v_n}{\partial \theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial v_n}{\partial e}\frac{de}{dt}
\end{aligned}\right\} \tag{3-190}
$$

利用(3-163)、(3-165)式的关系，可求得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial \theta} &= \frac{e\sin\theta}{p} r^2 \\
\frac{\partial v_r}{\partial \theta} &= \sqrt{\frac{K}{p}}\, e\cos\theta \\
\frac{\partial v_n}{\partial \theta} &= -\sqrt{\frac{K}{p}}\, e\sin\theta \\
\frac{\partial r}{\partial p} &= \frac{r}{p} \\
\frac{\partial v_r}{\partial p} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{K}{p}}\,\frac{e\sin\theta}{p} \\
\frac{\partial v_n}{\partial p} &= -\sqrt{\frac{K}{p}}\,\frac{1}{2r} \\
\frac{\partial r}{\partial e} &= -\frac{r^2}{p}\cos\theta \\
\frac{\partial v_r}{\partial e} &= \sqrt{\frac{K}{p}}\sin\theta \\
\frac{\partial v_n}{\partial e} &= \sqrt{\frac{K}{p}}\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{3-191}
$$

将上式及(3-188)代入(3-190)式，然后再代入(3-189)式，可得

$$
\left.\begin{aligned}
&-e\sin\theta\frac{d\omega}{dt} + \frac{1}{r}\frac{dp}{dt} - \cos\theta\frac{de}{dt} = \frac{re\sin\theta}{\sqrt{Kp}}\phi_3 \\
&-e\cos\theta\frac{d\omega}{dt} - \frac{e\sin\theta}{2p}\frac{dp}{dt} + \sin\theta\frac{de}{dt} \\
&\quad = \frac{re\cos\theta}{\sqrt{Kp}}\phi_3 + \sqrt{\frac{p}{K}}\phi_1 \\
&e\sin\theta\frac{d\omega}{dt} - \frac{1}{2r}\frac{dp}{dt} + \cos\theta\frac{de}{dt} \\
&\quad = -\frac{re\sin\theta}{\sqrt{Kp}}\phi_3 + \sqrt{\frac{p}{K}}\phi_2
\end{aligned}\right\} \tag{3-192}
$$

式中

$$\phi_3 = \sin u \operatorname{ctg} i \cdot \phi_3$$

将上式的第一第三两式相加，即得

$$\frac{dp}{dt} = 2r\sqrt{\frac{p}{K}}\phi_2 \tag{3-193}$$

再将求出的$\frac{dp}{dt}$代入第一第二两式，并顾及式(3-163)，则得

$$\frac{d\omega}{dt} = \sqrt{\frac{p}{K}} \cdot \left[-\frac{\cos\theta}{e}\phi_1 + \left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{\sin\theta}{e}\phi_2 - \frac{r}{p}\operatorname{ctg} i \sin u \cdot \phi_3\right] \tag{3-194}$$

$$\frac{de}{dt} = \sqrt{\frac{p}{K}} \cdot \left\{\sin\theta \cdot \phi_1 + \left[\left(1+\frac{r}{p}\right)\cos\theta + \frac{er}{p}\right]\phi_2\right\} \tag{3-195}$$

至此六个方程已求出五个，还缺一个$\frac{d\tau}{dt}$，这里不再详细推导，其结果为

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{r^2}{eK}\left[(e\sin\theta \cdot N - \cos\theta)\phi_1 + \frac{p}{r}N\phi_2\right] \tag{3-196}$$

式中

$$N = \frac{2p^2}{r^2}\int_0^\theta \frac{\cos\theta}{(1+c\cos\theta)^3}d\theta \tag{3-197}$$

式(3-185)，(3-186)，(3-193)，(3-194)，(3-195)及(3-196)便是所求的六个方程。

这六个方程既是研究天体（行星）摄动运动的微分方程，也是研究人造卫星摄动的基本方程。推导这六个方程有许多方法，有时根据不同的实际需要，这六个方程常常变换形式，例如不写为t的显函数，而利用(3-187)式的$\frac{du}{dt}$表示为$\frac{d\Omega}{du}$，…的形式。再者，前面导出六个方程中$\frac{dp}{dt}$还可变换成$\frac{da}{dt}$，$\frac{d\tau}{dt}$可变为$\frac{dM_0}{dt}$等等。

应用这六个方程还要解决的问题是，必须知道摄动力引起的摄动加速度ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3，这需要根据不同的摄动因素产生的摄动力的性质来决定，有关这些内容将在第三篇中讨论。

3.9.2 受摄轨道变化的初步分析

如上节所述，要研究卫星轨道的受摄变化，必须知道摄动因素的种类以及所引起的摄动加速度$\vec{\phi}$的表示式，本节仅就对近地卫星影响较大的两种因素，即地球形状的扁率和大气层的阻力，所引起的轨道变化作一些初步分析，而且分析仅限于椭圆轨道情形。

3.9.2.1 交点及近地点的变化

由(2-15)式及(2-16)式，我们知道，如果用球谐函数拟合地球引力位，则当假定地球是旋转对称（南北半球也对称）的扁球时，只需在(2-15)式中保留偶阶带谐项，而且主要是二阶带谐项，即取 $n=2$，$m=0$，于是(2-15)式变为

$$V=\frac{GM}{r}\left[1-J_2\left(\frac{R}{r}\right)^2\frac{1}{2}(3\sin^2\varphi'-1)\right]$$

上式的第一项就是(2-16)式所表示的将地球假定为圆球且质量M集中于球心时的引力位。可见，由于地球的非圆球而产生的摄动力的位应是(2-16)式与上式之差，设为V_1，则

$$V_1=J_2GM\frac{R^2}{2r^3}(3\sin^2\varphi'-1) \tag{3-198}$$

式中J_2是带谐系数，可以表示为下式

$$J_2=\frac{1}{3}\left(\frac{\omega^2a_e}{g_e}-2f\right) \tag{3-199}$$

其中ω是地球自转角速度(注意勿与近升距混淆)，以弧度表示，约为7.3×10^{-5}秒$^{-1}$，a_e为地球赤道半径，g_e为赤道重力值，f为地球扁率，算出的$J_2=-1082\times10^{-6}$。

如果按图 (3-8) 所取的坐标系，将摄动力$\vec{F}_r$分解为ξ、η、ζ三坐标轴上的分量，则产生的摄动加速度分量应为

$$\phi_1=\frac{\partial V_1}{\partial\xi},\ \phi_2=\frac{\partial V_1}{\partial\eta},\ \phi_3=\frac{\partial V_1}{\partial\zeta} \tag{3-200}$$

若将地球赤道，卫星轨道以及通过卫星的子午圈投影到天球上，将构成一个球面直角三角形，如图 3-13，令$u=\omega+\theta$，u，i，φ'有如下关系：

$$\sin\varphi'=\sin u\sin i$$

因此 (3-198) 式可写为

$$V_1=J_2GM\frac{R^2}{2r^3}(3\sin^2u\sin^2i-1) \tag{3-201}$$

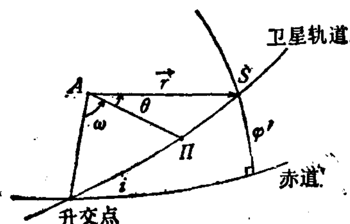


图 3-13

由于ξ轴与$\vec{r}$重合，故r若变化Δr，u和i不变，而$\Delta\xi=\Delta r$，$\Delta\eta=\Delta\zeta=0$，此时相应的位的变化量为ΔV_1，于是

$$\phi_1=\frac{\partial V_1}{\partial\xi}=\lim_{\Delta r\to0}\frac{\Delta V_1}{\Delta r}=\frac{\partial V_1}{\partial r}$$

由此可将 (3-201) 对r求偏导数，得

$$\phi_1=-\frac{3}{2}J_2GM\left(\frac{R^2}{r^4}\right)(3\sin^2u\sin^2i-1) \tag{3-202}$$

同理，若再取u的变化量为Δu，而r及i不变，则在η轴上的相应变化量$\Delta\eta=r$。Δu，可求得

$$\phi_2 = \frac{\partial V_1}{\partial \eta} = \lim_{\Delta\eta \to 0} \frac{\Delta V_1}{\Delta \eta}$$

$$= \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta V_1}{r \cdot \Delta u} = \frac{1}{r} \frac{\partial V_1}{\partial u}$$

根据(3-201)，对 u 求偏导数即得

$$\phi_2 = -\frac{3}{2} J_2 GM \left(\frac{R^2}{r^4}\right) \sin 2u \sin^2 i \tag{3-203}$$

同理又可求得

$$\phi_3 = \frac{3}{2} J_2 GM \left(\frac{R^2}{r^4}\right) \sin u \sin 2i \tag{3-204}$$

现在我们来看上列摄动加速度 ϕ_1，ϕ_2，ϕ_3，使轨道交点和近地点产生的变化。假定此时的密切轨道是椭圆，我们用 $d\Omega/dN$ 表示卫星从经过升交点开始到绕地球一圈后，即 u 从 o 增加到 2π，这段时间内 Ω 的变化，也就是交点位置的变化量，因此可以表示为：

$$\frac{d\Omega}{dN} = \int_0^{2\pi} \frac{d\Omega}{du} du \tag{3-205}$$

根据（3-185）的 $\frac{d\Omega}{dt}$ 式和（3-187）的 $\frac{du}{dt}$ 式，以及（3-204）式，可以求得

$$\frac{d\Omega}{du} = 3J_2 \left(\frac{R^2}{p^2}\right) \cos i \sin^2 u [1 + e\cos(u - \omega)] Q$$

$$Q = \left(1 - \frac{r^3}{GM} \frac{\phi_3}{p} \operatorname{ctg} i \sin u\right)^{-1}$$

将上式代入（3-205）式，求积分时，可取 $Q \approx 1$，同时认为卫星在绕地球一圈的短时间内 p，ω，i 不变，结果便得

$$\frac{d\Omega}{dN} = 3J_2 \frac{\pi R^2}{p^2} \cos i (\text{rad/圈})$$

$$= 3J_2 \frac{180° R^2}{p^2} \cos i (\text{度/圈}) \tag{3-206}$$

同理，可求得

$$\frac{d\omega}{dN} = \frac{3}{2} J_2 \frac{\pi R^2}{p^2} (5\cos^2 i - 1)(\text{rad/圈})$$

$$= \frac{3}{2} J_2 \frac{180° R^2}{p^2} (5\cos^2 i - 1)(\text{度/圈}) \tag{3-207}$$

如果卫星轨道的偏心率 e 不大，上两式还可简化。设取 R 为地球赤道半径，以 km 为单位，轨道半长轴 a 也以 km 为单位，GM 的量纲为 $\text{km}^3 \cdot \text{s}^{-2}$，则卫星的周期 $T = 2\pi a^{3/2}$

$(GM)^{-1/2}$秒，因此，Ω在一秒内的平均变化量为$\frac{d\Omega}{dN}/T$，于是得

$$\dot{\Omega}=-\frac{3}{2}J_2\left(\frac{GM}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{R}{a}\right)^{7/2}(1-e^2)^{-2}\cos i(\mathrm{rad/s}) \tag{3-208}$$

或表示为

$$\dot{\Omega}=\frac{180}{\pi}(86400)\frac{3}{2}J_2\left(\frac{GM}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{R}{a}\right)^{7/2}(1-e^2)^{-2}\cos i(\text{度/日}) \tag{3-209}$$

式中的“日”是平太阳日。

对于$e<0.1$的地球卫星轨道，取$J_2=-1082\times10^{-6}$，$GM=398600$，$R=6378$，则

$$\dot{\Omega}\approx-10\left(\frac{R}{a}\right)^{7/2}\cos i(\text{度/日}) \tag{3-210}$$

若卫星轨道半长轴$a=7000$公里，$i=45°$，则可算得$\dot{\Omega}\approx-5°$日$^{-1}$，负号表示交点移动方向与Ω的增加方向相反，即向西移动。

用类似方法也可简化（3-207）式为

$$\dot{\omega}=+\frac{3}{4}J_2\left(\frac{GM}{R^3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{R}{a}\right)^{7/2}(1-e^2)^{-2}(5\cos^2 i-1)(\mathrm{rad/s}) \tag{3-211}$$

或

$$\dot{\omega}\approx-5\left(\frac{R}{a}\right)^{7/2}(5\cos^2 i-1)(\text{度/日}) \tag{3-212}$$

由以上讨论的结果可知：

（1）由于地球扁率的摄动影响，卫星轨道升交点不断移动，其方向与卫星运动的方向相反，在不太长的时间内，例如对于近地卫星在几天内可认为交点在均匀地移动。i越小，移动得越快，$i\approx0$，近于赤道面的卫星，每天可达9°。

（2）由于$\dot{\omega}$的存在，表示近地点所在的轨道拱线在轨道面内转动（也几乎是均匀地转动），转动速度随i值的不同有很大差别，当$(5\cos^2 i-1)=0$，即$i=63.4°$时，$\dot{\omega}=0$，即不转动，$i<63.4°$时，转动方向为正，即与卫星运动同方向，$i>63.4°$时，方向相反，所以63.4°称为临界倾角，在临界角附近，转动很慢，例如$i=65°$，每天约转0.4°，方向与卫星运动方向相反，近于赤道面的卫星轨道，$\dot{\omega}$每天可达17°，$i=90°$时，$\dot{\omega}$约每天转$-4.5°$，这是反向转动的最大值。

（3）a越大，$\dot{\Omega}$及$\dot{\omega}$转动越慢，当a增大时，两者转动速度迅速减小。

如果利用$a=R+\frac{1}{2}(H_a+H_\pi)$，$(1+x)^{-7/2}\approx(1-\frac{7}{2}x)$，改写（3-210）及（3-212）式，可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{\Omega}&\approx-10\left(1-\frac{7}{4}\frac{H_a+H_\pi}{R}\right)\cos i\\ \dot{\omega}&\approx-5\left(1-\frac{7}{4}\frac{H_a+H_\pi}{R}\right)(5\cos^2 i-1)\end{aligned}\right\} \tag{3-213}$$

式中R是平均地球半径，H_a及H_π分别是卫星在远地点和近地点处的高度。

（4）地球扁率的摄动对其他根数的影响要用更精确些的引力位展开式来分析，不过它们主要是周期性的变化，卫星绕地球一个周期后剩余的变化量很小，近似分析时，可认为无影响，也就是认为不影响轨道的形状和大小。

3.9.2.2 轨道形状和大小的变化

本节讨论这个问题时，不考虑地球扁率影响，而认为卫星受地球质量集中于球心的引力作用，同时又是在大气层中运动，受大气阻力的摄动影响。

由于大气层的密度随着离地面的高度增加而迅速减小，例如在高度240km处，大气密度只是海平面处大气密度的10^{-10}，但是阻力效应仍很显著，甚至在1000～2000km高度，仍支配着一切圆轨或偏心率不大的椭圆轨道的卫星的生存期。

大气层密度还因种种因素而变化，例如昼夜就有变化，在300km高处中午的密度比半夜几乎大一倍，若在1000km高处，则可能要大60倍。此外，500km以上高空大气层的密度还会随太阳黑子活动的强弱而变，平静年和活动年也要相差10～20倍，因而直到现在还很难求得一种很完善的大气层模型来描述它的结构，在许多情况下，只能利用近似的实验公式。

卫星受大气阻力影响的大小主要取决于其质量m和横截面积s之比m/s的大小。

设卫星的质量为m，垂直于卫星运动方向的最大横截面面积为s，大气密度为ρ，卫星运动速度为v，则大气阻力$\vec{F}_a$的大小按以下牛顿公式计算：

$$F_a=\frac{1}{2}c_x s\rho v^2 \tag{3-214}$$

式中c_x为前阻力系数。$\vec{F}_a$的方向应与卫星运动方向相反，由于$\vec{F}_a$引起的摄动加速度应为

$$\phi=\frac{1}{2}c_x\frac{s}{m}\rho v^2$$

写成矢量，即为

$$\vec{\phi}=\frac{1}{2}c_x\frac{s}{m}\rho v^2\left(-\frac{\vec{v}}{v}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}c_x\frac{s}{m}\rho v\vec{v}$$

但因$\vec{v}$可以分解为

$$\vec{v}=v_r\vec{e}_1+v_n\vec{e}_2$$

故摄动加速度可分解为

$$\left.\begin{aligned}\phi_1&=-\frac{1}{2}c_x\frac{s}{m}\rho v v_r\\ \phi_2&=-\frac{1}{2}c_x\frac{s}{m}\rho v v_n\\ \phi_3&=0\end{aligned}\right\} \tag{3-215}$$

大气密度ρ随高度h变化的函数关系并未完全清楚，因而有种种实验关系式，下面是其中的一种近似公式

$$\rho(h)=\rho_1\frac{x}{\left[1+\frac{h-h_0}{a}\right]^k}\tag{3-216}$$

式中ρ_1是常数，而x，a，k，h_0对于不同的高度范围有不同的取值。

由于这里$\phi_3=0$，所以由式（3-185）及（3-186）可知，

$$\frac{d\Omega}{dt}=0,\ \frac{di}{dt}=0$$

这就说明Ω及i是常数，即大气阻力不会引起轨道面位置的变化。

如果将§3.9.3中导出的$\frac{dp}{dt}$，$\frac{de}{dt}$，$\frac{d\omega}{dt}$都换成$\frac{dp}{du}$，$\frac{de}{du}$，$\frac{d\omega}{du}$，则由（3-215）式可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{du}&=-c_x\frac{s}{m}\rho\cdot\varphi(p,\ e,\ \omega,\ u)\\\frac{de}{du}&=-c_x\frac{s}{m}\rho\cdot\psi(p,\ e,\ \omega,\ u)\\\frac{d\omega}{du}&=-c_x\frac{s}{m}\rho\cdot\chi(p,\ e,\ \omega,\ u)\end{aligned}\right\}\tag{3-217}$$

上三式中最后的因子分别表示三个函数，如下式：

$$\varphi=\frac{p^2(1+2e\cos\theta+e^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+e\cos\theta)^2},\quad \psi=\frac{p(1+2e\cos\theta+e^2)^{\frac{1}{2}}}{(1+e\cos\theta)^2}$$

$$\chi=\frac{p\sin\theta(1+2e\cos\theta+e^2)^{\frac{1}{2}}}{2e(1+e\cos\theta)}$$

其中：$\theta=u-\omega$。

显然，要求解这样的非线性微分方程组相当困难，所以我们仍采用上一小节的办法，计算卫星绕地球一圈中p，e，ω的平均变化Δp，Δe，$\Delta\omega$，也就是取u从0到2π期间的变化，于是可写为

$$\left.\begin{aligned}\Delta p&=-c_x\frac{s}{m}\int_0^{2\pi}\rho\cdot\varphi(p,\ e,\ \omega,\ u)du\\\Delta e&=-c_x\frac{s}{m}\int_0^{2\pi}\rho\cdot\psi(p,\ e,\ \omega,\ u)du\\\Delta\omega&=-c_x\frac{s}{m}\int_0^{2\pi}\rho\cdot\chi(p,\ c,\ \omega,\ u)du\end{aligned}\right\}\tag{3-218}$$

积分计算时，将p、e、ω看做常数，因为在卫星一个周期中它们变化很小。可以证明，按这样计算时，$\Delta\omega=0$，这表示ω将会有积累性变化，或者叫做长期摄动，但在这里

仍认为$\omega=\omega_0=$常数，于是积分算出的结果只有Δp和Δe，两者分别为p、e在卫星绕地球一圈内的平均变化量。

p、e这两个量恰是椭圆轨道的参数，它们的变化可以反映轨道大小和形状的变化。

第II篇　几何定位

第四章　常用坐标系

点位的确定总是和一定的坐标系联系在一起的，因而坐标系的问题就成为测量中一个十分重要的基本问题。一般地说，要确定一个坐标系就需指明坐标原点的位置，坐标轴的指向以及确定点位时所用的参数这三个要素。本章将简要介绍在卫星大地测量中常用的几种坐标系以及它们之间的关系。

§4.1　天球坐标系

一、卫星大地测量中的天球坐标系

卫星大地测量中常用的天球坐标系和天文学中第二赤道坐标系（赤经 α，赤纬 δ）类似，其区别仅在于：

①在卫星大地测量中我们关心的是人造卫星相对于地球的运动，而不是相对于太阳的运动。因而总是把天球坐标系的原点选择在地心上而不是日心上，而在天文学中，为了使恒星的位置不随地球的公转而变，往往把坐标系的原点（天球中心）选择在日心上。显然坐标原点位置的这种差别，对恒星坐标的影响(即恒星的周年视差)，相当于大地测量中的偏心观测。由于恒星离我们很远，周年视差一般均小于0.1″。在卫星摄影观测中，我们要根据已知的恒星坐标来计算卫星的坐标，但目前摄影观测的精度并不高，一般为±1″左右。因而对绝大多数恒星而言，可不考虑坐标原点不同造成的影响。少数恒星离我们较近，需要考虑周年视差，其中半人马座 α 星的视差最大，为0.761″，周年视差大于0.33″的恒星有8颗，大于0.20″的恒星有40颗，大于0.10″的恒星共有300颗。

②在卫星大地测量中，从坐标原点到卫星的距离 ρ 往往能精确求得，因而除了天文学中采用的表示天体方向的两个参数 α、δ 外，还需增加第三个参数 r 来表示距离。

③为了方便，除采用球面坐标系外，在卫星大地测量中还经常采用空间直角坐标(X，Y，Z）来表示卫星的位置。

因此，这里讨论的常用天球坐标系可以这样来描述：它的坐标原点在地心，Z 轴指向北天极 P、X 轴指向春分点 γ，Y 轴垂直于 X 轴、Z 轴，组成右手坐标系；表示一个点在空间的位置时，参数有两种，一种是(α，δ，r)，另一种是(X，Y，Z)。也就是说卫星大地测量中的天球坐标系既可采用球面极坐标的形式，也可采用空间直角坐标的形式。这两种表示点位的形式之间有下列关系：

$$
\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{bmatrix} \tag{4-1}
$$

二、平天球坐标系和真天球坐标系

由于岁差和章动，天球坐标系就有平天球坐标系和真天球坐标系之分，前者的Z轴和X轴分别指向平天极和平春分点，后者的Z轴和X轴则分别指向真天极和真春分点。无论是真天球坐标系（既考虑岁差又考虑章动）或平天球坐标系（仅考虑岁差），它们的坐标轴在空间的指向都是随时间而变的，因而恒星在这些坐标系中的位置也时刻在变动，这就给编制星表带来了许多困难。为了解决这个问题，必须选定某一瞬间的天球坐标系作为标准，在一个相对不变的坐标系中来编制星表。如果不计恒星自行，在这样的坐标系中恒星的坐标就是常数。为了便于归算，我们总是选某一历元的平天球坐标系而不是真天球坐标系来编制星表。至于星表历元，从理论上讲是可以任意选择的。但为了使各种星表便于进行相互比较和补充，现有各星表大多均选用 1950.0 作为星表历元。国际天文协会 IAU 在第十六届全体会议通过的决议中规定，新编制的基本星表 $FK5$ 和 1984 年起各国和国际上编的所有星表均采用新的标准历元：J2000.0（即 2000 年 1 月 1.5 日，用儒略日表示则为 2451545.0 日）。目前正处于新旧交替阶段，使用时应注意查阅各星表的说明。

恒星的位置属于某一历元的平天球坐标系，但观测实际上又是在真天球坐标系中进行的。观测值都是相对于观测瞬间的真天极和真春分点的，所以要把从星表中查取的属于某一星表历元平天球坐标系的恒星坐标 α、δ，化算到观测瞬间的真天球坐标系中，即加上岁差改正和章动改正。

一阶岁差改正公式（从星表历元的平天球坐标化至观测瞬间的平天球坐标）为

$$
\left.\begin{aligned} \alpha' - \alpha_0 &= (m + n\sin\alpha\,\mathrm{tg}\,\delta)(t' - t_0) \\ \delta' - \delta_0 &= n\cos\alpha(t' - t_0) \end{aligned}\right\} \tag{4-2}
$$

式中 t_0为星表历元。

$$
m = 46.08506'' + 0.02794''\mathrm{T}
$$
$$
n = 20.04685'' - 0.00853\mathrm{T}
$$

T 则为从观测时刻至 1900.0 的回归世纪数。

章动改正公式为（从观测瞬间的平天球坐标化至真天球坐标）

$$
\begin{aligned} \alpha_{真} - \alpha_{平} &= (\Delta\psi)(\cos\varepsilon + \mathrm{tg}\,\delta\sin\alpha\sin\varepsilon) - (\Delta\varepsilon)\mathrm{tg}\,\delta\cos\alpha \\ \delta_{真} - \delta_{平} &= (\Delta\psi)\sin\varepsilon\cos\alpha + (\Delta\varepsilon)\sin\alpha \end{aligned} \tag{4-3}
$$

式中

$$
\left.\begin{aligned} (\Delta\psi) = &(-17.234'' - 0.017\mathrm{T})\sin\Omega \\ &+ 0.2088''\sin 2\Omega - 1.2730''\sin 2(\Omega + F - D) \\ &- 0.2037''\sin 2(\Omega + F) + 0.1261''\sin l' \\ (\Delta\varepsilon) = &(9.210'' + 0.00091T)\cos\Omega \\ &- 0.0904\cos 2\Omega + 0.552''\cos(\Omega + F - D) \\ &+ 0.088\cos 2(\Omega + F) \end{aligned}\right\} \tag{4-4}
$$

T是观测瞬间到 1900.0 的回归世纪数。

$$l' = 6.2310884 + 0.017201970D_0 (\text{rad})$$

$$\Omega = 0.21233229 - 0.0009242193D_0 (\text{rad})$$

$$F = 0.68125979 + 0.23089572D_0 (\text{rad})$$

$$D = 2.3056408 + 0.21276871D_0 (\text{rad})$$

D_0是观测瞬间至 1950.1.0 的积日数。

更为精确的二阶岁差改正公式可查阅天文学专著。

§4.2 站心坐标系

原点在测站的坐标系称为站心坐标系。在卫星大地测量中使用较多的站心坐标系有站心天球坐标系和地平坐标系。

一、站心天球坐标系

我们把坐标原点定在测站上，三个坐标轴分别和天球坐标系的三个坐标轴对应平行的坐标系定义为站心天球坐标系，有时简称为测站坐标系。在天文学中一般并不引入这种坐标系，因为它和坐标原点在地心的天球坐标系之间仅相差了一个周日视差，而对于恒星来讲，周日视差完全可以略去，因而坐标原点在地心或在测站对恒星来讲没有必要加以区分。然而在卫星大地测量中则不然，卫星离我们很近，卫星在测站坐标系中的坐标和在天球坐标系中的坐标相差很远，有时可达几十度，因而有必要引入这一坐标系。

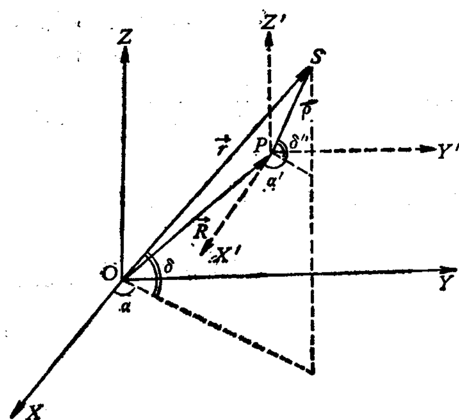


图 4-1

对卫星的任何观测只能在测站上进行，也就是说我们只能得到观测值 ρ、α'、δ'，然而在许多场合下我们所需要的却是卫星在天球坐标系中的坐标 r、α、δ(见图 4-1)，下面我们来推导它们之间的转换关系式。

从图 4-1 可得

$$\vec{r} = \vec{R} + \vec{\rho}$$

用直角坐标表示即为

$$\left.\begin{aligned} r\cos\delta\cos\alpha &= X_r + \rho\cos\delta'\cos\alpha' \cdots\cdots (1) \\ r\cos\delta\sin\alpha &= Y_r + \rho\cos\delta'\sin\alpha' \cdots\cdots (2) \\ r\sin\delta &= Z_r + \rho\sin\delta' \cdots\cdots (3) \end{aligned}\right\} \qquad (4\text{-}4)$$

将(1)$\times\cos\alpha'$ + (2)$\times\sin\alpha'$得

$$r\cos\delta\cos(\alpha - \alpha') = X_r\cos\alpha' + Y_r\sin\alpha' + \rho\cos\delta'$$

即

$$r = \frac{\rho\cos\delta' + X_r\cos\alpha' + Y_r\sin\alpha'}{\cos\delta\cos(\alpha - \alpha')}$$

将(2)×cos α′−(1)×sin α′得

$$r\cos\delta\sin(\alpha-\alpha')=Y_s\cos\alpha'-X_s\sin\alpha'$$

将 r 代入后可得

$$\operatorname{tg}(\alpha-\alpha')=\frac{Y_s\cos\alpha'-X_s\sin\alpha'}{\rho\cos\delta'+X_s\cos\alpha'+Y_s\sin\alpha'}$$

将(3)×cos(α−α′)得

$$(\rho\sin\delta'+Z_s)\cos(\alpha-\alpha')$$
$$=r\sin\delta\cos(\alpha-\alpha')$$

将 r 代入后得

$$\operatorname{tg}\delta=\frac{(\rho\sin\delta'+Z_s)\cos(\alpha-\alpha')}{\rho\cos\delta'+X_s\cos\alpha'+Y_s\sin\alpha'}$$

现将转换公式归纳如下，按公式顺序进行计算

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha-\alpha')&=\frac{Y_s\cos\alpha'-X_s\sin\alpha'}{\rho\cos\delta'+X_s\cos\alpha'+Y_s\sin\alpha'}\\ \operatorname{tg}\delta&=\frac{(\rho\sin\delta'+Z_s)\cos(\alpha-\alpha')}{\rho\cos\delta'+X_s\cos\alpha'+Y_s\sin\alpha'}\\ r&=\frac{\rho\cos\delta'+X_s\cos\alpha'+Y_s\sin\alpha'}{\cos\delta\cos(\alpha-\alpha')}\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}5)$$

其中（X_s，Y_s，Z_s）为地面测站的坐标，为已知值。

反之，有时我们已知卫星的天球坐标，要求出其测站坐标（例如已知卫星轨道，要求出卫星通过测站的时间，方位，高度时就需进行这样的计算），按照同样的方法，可得出

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha'-\alpha)&=\frac{X_s\sin\alpha-Y_s\cos\alpha}{r\cos\delta-X_s\cos\alpha-X_s\sin\alpha}\\ \operatorname{tg}\delta'&=\frac{(r\sin\delta-Z_s)\cos(\alpha'-\alpha)}{r\cos\delta-X_s\cos\alpha-Y_s\sin\alpha}\\ \rho&=\frac{r\cos\delta-X_s\cos\alpha-Y_s\sin\alpha}{\cos(\alpha-\alpha')\cos\delta'}\end{aligned}\right\}\qquad(4\text{-}6)$$

另一种转换方法就是通过直角坐标来进行转换。

$$\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}=\rho\begin{pmatrix}\cos\delta'\cos\alpha'\\\cos\delta'\sin\alpha'\\\sin\delta'\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}X_s\\Y_s\\Z_s\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}X'\\Y'\\Z'\end{pmatrix}$$

$$\alpha=\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}$$

$$\delta = \arccos \frac{\sqrt{X^2+Y^2}}{r}$$

$$r = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$$

或

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\delta\cos\alpha \\ \cos\delta\sin\alpha \\ \sin\delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} X_s \\ Y_s \\ Z_s \end{pmatrix}$$

$$\alpha' = \mathrm{arc\,tg} \frac{Y'}{X'}$$

$$\delta' = \arccos \frac{\sqrt{X'^2+Y'^2}}{\rho}$$

$$\rho = \sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2} \tag{4-7}$$

这种方法步骤清楚，无需记公式，计算也不比前面的方法复杂。

二、地平坐标系

我们将坐标原点在测站，Z''轴与垂线重合指向天顶，X''轴在地平面内指向北，Y''轴在地平面内指向西，以测站至目标的距离ρ，高度角h和天文方位角a为参数的坐标系，称为地平坐标系，这是观测工作中被广泛采用的一个坐标系。在卫星大地测量中，规定天文方位角从正北起算，顺时针量度(和大地方位角的规定一致)，见图 4-2。从图 4-3 可以看出，若用直角坐标为参数来表示点的位置，则有

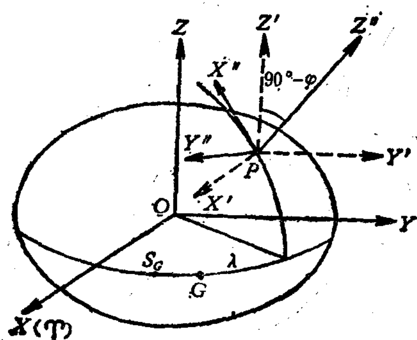


图 4-2

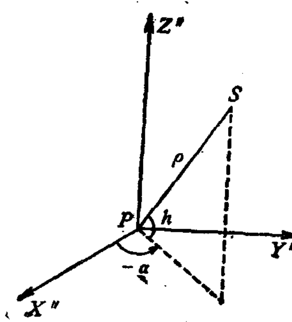


图 4-3

$$\begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \cos h\cos a \\ -\cos h\sin a \\ \sin h \end{pmatrix} \tag{4-8}$$

从图 4-2 可以看出，若将地平坐标系 $0-X''Y''Z''$绕Y''轴旋转$(90°-\varphi)$角，再绕

Z''轴旋转（$180^\circ - S_G - \lambda$）角就能和测站坐标系 $0-X'Y'Z'$重合，所以测站坐标系和地平坐标系间的转换关系式为

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{pmatrix} = R_Z(180^\circ - S_G - \lambda) R_Y(90^\circ - \varphi) \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos(S_G+\lambda) & \sin(S_G+\lambda) & 0 \\ -\sin(S_G+\lambda) & -\cos(S_G+\lambda) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X'' \\ Y'' \\ Z'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos(S_G+\lambda)\sin\varphi & \sin(S_G+\lambda) & \cos(S_G+\lambda)\cos\varphi \\ -\sin(S_G+\lambda)\sin\varphi & -\cos(S_G+\lambda) & \sin(S_G+\lambda)\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos h \ \cos\alpha \\ -\cos h \ \sin\alpha \\ \sin h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\cos(S_G+\lambda)\sin\varphi\cos h\cos\alpha - \sin(S_G+\lambda)\cos h\sin\alpha \\ +\cos(S_G+\lambda)\cos\varphi\sin h \\ -\sin(S_G+\lambda)\sin\varphi\cos h\cos\alpha + \cos(S_G+\lambda)\cos h\sin\alpha \\ -\sin(S_G+\lambda)\cos\varphi\sin h \\ \cos\varphi\cos h\cos\alpha + \sin\varphi\sin h \end{pmatrix} \tag{4-9}$$

如果地平坐标系的Z轴不是和垂线重合而是和椭球面法线重合，可以用同样的方法求出它与原点在站心、三个坐标轴分别平行于地球坐标系的站心坐标系间的转换关系。这时只需将式（4-9）中的天文纬度φ换成大地纬度B，将（$S_G+\lambda$）换成大地经度L即可。

§4.3　地球坐标系

一、地球坐标系的两种常用形式

在卫星大地测量中经常用到的地球坐标系有两种，一种是空间直角坐标系，另一种是大地坐标系。

采用空间直角系的优点是，它不涉及参考椭球体的概念，在处理全球性资料时可以避免不同参考椭球体之间的转换问题，而且求两点之间的距离和方向时，计算公式十分简洁。

但是用空间直角坐标来表示点位很不直观，因为它和我们习惯上用B、L、H表示点位的方法不同，若给定某点的(X，Y，Z)，我们很难立即找出它在地图上的位置。对于海上船舶来讲，往往只需要二维坐标B，L而不需要H。因而在用卫星为船舶导航时，通

常仍采用大地坐标系，为了用卫星大地测量的资料来检核和加强天文大地网，求出转换参数，有时也需要把资料统一到大地坐标系中去，所以大地坐标系也是经常用到的一种坐标系。

如果空间直角坐标系的坐标原点位于椭球中心，Z 轴和椭球短半轴重合，指向北，X 轴指向经度零点，Y 轴组成右手坐标系，那么同一个点的空间直角坐标和大地坐标之间就有确定的数学转换关系。这时空间直角坐标系和大地坐标系也可以看成是同一个地球坐标系的两种不同形式，它们间的转换关系如下：

（1）已知B、L、H，求X、Y、Z

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (N+H)\cos B\cos L \\ (N+H)\cos B\sin L \\ [N(1-e^2)+H]\sin B \end{bmatrix} \tag{4-10}$$

式中，N为椭球的卯酉曲率半径，e 为椭球的第一偏心率。

（2）已知X、Y、Z，求B、L、H

$$\left.\begin{aligned} B &= \operatorname{arc\,tg}\left[\operatorname{tg}\varphi\left(1+\frac{ae^2}{Z}\;\frac{\sin B}{W}\right)\right] \\ L &= \operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X} \\ H &= \frac{r\cos\varphi}{\cos B}-N \end{aligned}\right\} \tag{4-11}$$

式中

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2}},$$

$$r = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2},$$

$$W = \sqrt{1-e^2\sin^2 B},$$

a 为椭球长半轴。

式 (4-11) 理论严密，形式简明，但在计算B时，需用逐渐趋近法。为了避免这一限制，也可采用直接解算公式，即

$$\operatorname{tg}B = \operatorname{tg}\varphi + A_1e^2\left[1+\frac{e^2}{2}\left[A_2+\frac{e^2}{4}\left(A_3+\frac{A_4}{2}e^2\right)\right]\right] \tag{4-12}$$

其中 $A_1 = \dfrac{a}{R}\operatorname{tg}\varphi$

$$A_2 = \sin^2\varphi + 2\left(\frac{a}{R}\right)\cos^2\varphi$$

$$A_3 = 3\sin^4\varphi + 16\left(\frac{a}{R}\right)\sin^2\varphi\cos^2\varphi + 4\left(\frac{a}{R}\right)^2\cos^2\varphi(2-5\sin^2\varphi)$$

$$A_4 = 5\sin^6\varphi + 48\left(\frac{a}{R}\right)\sin^4\varphi\cos^2\varphi + 20\left(\frac{a}{R}\right)^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi(4-7\sin^2\varphi)$$

$$+16\left(\frac{\alpha}{R}\right)^{8}\cos^{2}\varphi(1-7\sin^{2}\varphi+8\sin^{4}\varphi)$$

式中略去了e^{10}项，当$B\approx45°$时，公式的精度约为$4''\cdot10^{-7}$。

二、地心坐标系和参心坐标系

我们将坐标原点位于地球质心的空间直角坐标系，或在一个中心与地球质心重合的椭球上建立的大地坐标系称为地心坐标系。

反之，坐标原点不在地球质心上而在不与质心重合的椭球中心，则称为参心坐标系。

在常规大地测量中，是用一个参考椭球体面作为本国（或本地区）大地测量的基准面。该参考椭球体的几何元素和它的定位是用弧度测量方法在满足大地水准面差距平方和最小的条件下求得的，或者说是在使参考椭球体面与局部大地水准面最为吻合的条件下求得的，用这种方法求得的参考椭球体其中心一般不会和地球质心重合，通常可相差数百米。所以，用常规大地测量的方法一般只能建立参心坐标系。参心和质心不重合在常规大地测量中是允许的，不影响应用。

但是从本世纪50年代开始，空间技术和远程武器得到了迅速的发展。人造卫星和远程武器入轨后都是围绕地球质心飞行的，因而只有在地心坐标系中才能方便地进行计算。显然远程武器发射时发射点的坐标，以及精密定轨时卫星跟踪站的坐标也必须属于地心坐标系，因此提供高精度的地心坐标以满足空间技术和远程武器的需要就成为卫星大地测量的任务之一。

看起来似乎地心坐标既能满足常规大地测量的需要又能满足空间大地测量的需要，因而可用地心坐标系来取代参心坐标系，但实际不然，因为地心坐标系和参心坐标系各有其自己的特殊用途。对于仅涉及一个国家（或地区）内点与点之间相对位置的大量常规工作而言，一般仍以采用局部性的参心坐标系为宜，这是因为：

（1）一般说采用参心坐标系可以使本国（或地区）范围内大地水准面与椭球体面符合得更好，大地水准面差距较小，有利于把观测资料归化到椭球面上去。

（2）国家大地点坐标涉及面广，一旦确定后就要求保持相对稳定，不允许经常变动。而地心坐标只涉及卫星跟踪台站和导弹发射台，这些台站的地心坐标要求不断精化，因而经过若干年积累了一定的观测资料后就要重新解算以建立新的地心坐标。以美国为例，一般1～2年就要进行一次。

（3）有利于地心坐标的保密。

考虑到上述原因，我国同时建立了1980年国家大地坐标系（参心坐标系）和1980年地心坐标系。

三、平地球坐标系和瞬时地球坐标系

上面我们介绍了有关地球坐标系的坐标原点问题，现在来讨论坐标轴的指向。在讨论前先简要介绍一下极移的基本概念。

（1）极移

地球自转轴和地面的交点称为地极。由于地球内部和外部的种种动力学因素，使得地球体对于自转轴产生相对运动，因而引起了地极的移动，这种现象称为极移。极移是一种

复杂的运动，主要由两个周期性分量组成，一个是chander周期分量，主要是由地球内部的质量运动引起的，周期约为1、2年；另一个是周年分量，主要是由地球表面的质量运动（如洋流、大气环流等）引起的。

显然极移会使测站纬度发生变化，根据这个道理可以用来测定极移。经常性测定极点坐标的工作是由国际纬度局（ILS）进行的，从19世纪末就已开始。在北纬39°08′的平行圈上分布了5个测站，它们是日本的水泽（Mizusawa)(3.602″)，苏联的基塔(Kitab)(1.850″)，意大利的卡洛福特(Carloforte)(8.941″)，美国的尤凯亚（Ukiah)(12.096″)和盖塞斯堡（Gaithersburg)(13.202″)。这些站在经度上分布较均匀，根据这5个站纬度的变化就可计算出极点的移动量。

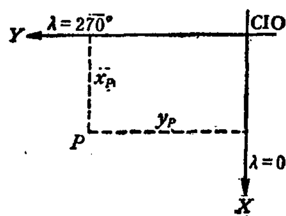


图 4-4

1967年第14届国际大地测量和地球物理联合会全体大会决定，定义国际纬度局根据1900～1905年测出的极点定出的平均位置为国际协用原点CIO，并以此作为极移的坐标原点。瞬时地极P的位置采用它在$\lambda=0°$的子午圈上的分量x_P和在$\lambda=270°$的子午圈上的分量y_P来表示，如图4-4所示。

1962年，按国际天文协会的决议，ILS改组为国际极移局IPMS，增加了观测站，提高了极移的测定精度。1968年国际时间局BIH也组织了测定极移的工作，此后又加入了用卫星多普勒观测测定极移的资料（DPMS）一并平差，提高了解算极移值的精度。IPMS和BIH是目前国际上测定极移的两个主要机构，能以较高的精度测定瞬时地极的移动，但严格地说测定的极移值已不属于CIO系统。上述组织均定期公布极移数值。图4-5为1984～1988年间瞬时地极的位置图。

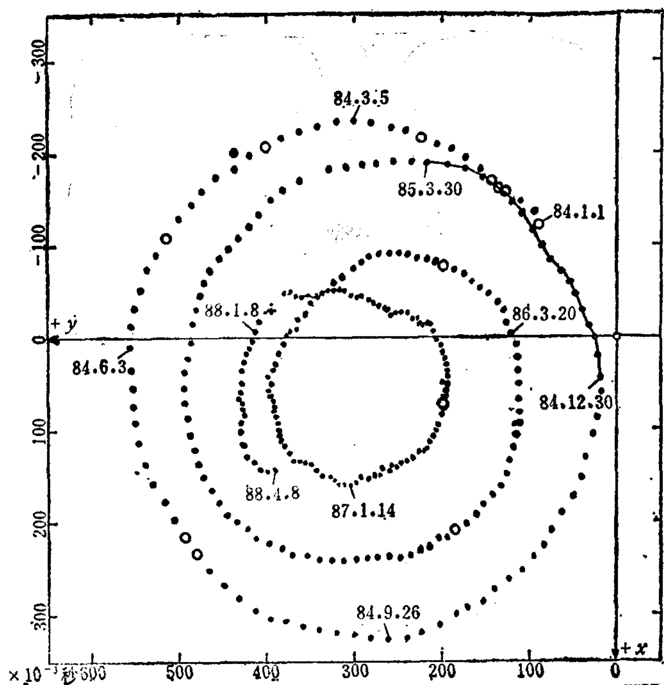


图 4-5

我国于1958年在国际纬度线上（北纬39°08′）建立了天津纬度站。1966年起，根据各台站的测纬资料提供以历元平极为参考点的地极坐标，70年代中期建立了以1968.0平极为参考的地极坐标系统（JYD系统），目前内部精度约为±0.01″(见参考文献[5])。

需要指出的是，极移和岁差、章动是两个不同的概念。岁差和章动指的是地球连同它的自

转轴一起在空间转动，但地球和自转轴之间并未发生相对运动，因而它只会影响恒星的赤经赤纬，而不会影响地面测站的坐标；极移则相反，它是地球相对于自转轴的转动，但它并不影响地球自转轴在空间的指向，因而极移只会使地面测站的坐标发生变动，不会影响恒星的天球坐标。

（2）平地球坐标系和瞬时（真）地球坐标系

Z 轴和瞬时自转轴重合（或平行）的地球坐标系称为瞬时（真）地球坐标系。由于观测都是在瞬时坐标系中进行的，所有的观测值都是相对于瞬时自转轴的，因而求得的测站坐标也是属于瞬时地球坐标系的。然而由于极移，瞬时自转轴在不断地变化。所以在瞬时地球坐标系中，地面固定点的坐标也在不断变化。也就是说同一测站在不同时间进行观测求得的坐标是不同的。显然我们不宜采用瞬时坐标系来表示测站在地球上的位置，而需要选择一个固定在地球上的坐标系来表示点位。或者说我们希望选择某一自转轴它不是指向瞬时极而是指向某一固定点。这个固定点一般有两种取法，一是如目前世界上许多国家那样，选择国际协用原点 CIO（即 1900～1905 年间瞬时极的平均位置——平极）作为固定点，二是取某一观测历元的平极（如我国的 JYD.1968.0）作为固定点。定义 Z 轴和某一固定自转轴重合或平行的地球坐标系为平地球坐标系，它既可采用空间直角坐标的形式，又可采用大地坐标的形式（采用大地坐标时指的是椭球体的短轴与某一固定自转轴重合或平行）。有些书中把平地球坐标系称为平大地坐标系，但这样可能容易混淆。

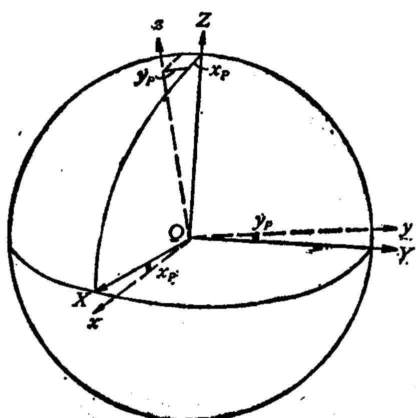


图 4-6

原点在地心，Z 轴指向国际协用原点 CIO，X 轴指向国际时间局 BIH 定义的起始子午线与 CIO 的赤道的交点——经度零点，Y 轴垂直于 X 轴并与 Z 轴组成右手系，这个坐标系称为国际协议坐标系，也称为 CIO-BIH 坐标系。这是广泛采用的一种平地球坐标系。

根据观测结果求得的测站坐标是属于瞬时地球坐标系的，为了使不同时期观测的成果可以互相比较，必须将它们都化算到平地球坐标系中去。从图 4-6 可以看出，只需将瞬时地球坐标系 $O-xyz$ 绕 Y 轴转动 $(-X_p)$ 角；再绕 X 轴转动 $(-Y_p)$ 角就可和平大地坐标系 $O-XYZ$ 重合，即

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = R_x(-Y_p)\cdot R_y(-X_p)\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos Y_p & -\sin Y_p \\ 0 & \sin Y_p & \cos Y_p \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos X_p & 0 & \sin X_p \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin X_p & 0 & \cos X_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

由于极移值 X_p，Y_p 都是小于 0.5″ 的微小值，所以 $\cos Y_p=\cos X_p=1$，$\sin X_p=X_p$，$\sin Y_p=Y_p$，于是有

$$
\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-Y_p\\0&Y_p&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&X_p\\0&1&0\\-X_p&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}
$$

$$
=\begin{pmatrix}1&0&X_p\\0&1&-Y_p\\-X_p&Y_p&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \tag{4-13}
$$

需要说明的是JYD.1968.0的极点坐标的表示方法与CIO系统不同，Y_p是瞬时地极在$\lambda=90°$E子午线上的分量，采用JYD.1968.0系统时式（4-13）中Y_p前的符号都要相反。

（3）瞬时地球坐标系和瞬时天球坐标系的关系

我们知道瞬时地球坐标系的z轴和瞬时天球坐标系的z轴是重合的，因为它们都和瞬时自转轴重合。但瞬时地球坐标系的x轴指向格林尼治平子午线，而瞬时天球坐标系的x轴指向真春分点♈，两者相差一个格林尼治真恒星时S_G。见图4-7。将真天球坐标系绕z_c轴旋转S_G角后，即可和瞬时地球坐标系重合，即

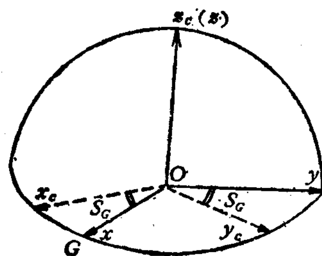


图 4-7

$$
\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=R_z(S_G)\begin{pmatrix}x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos S_G&\sin S_G&0\\-\sin S_G&\cos S_G&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_c\\y_c\\z_c\end{pmatrix} \tag{4-14}
$$

上述关系式也适用于参心地球坐标系。因为参心坐标系的起始子午面和地心坐标系的起始子午面是平行的，故O♈和O'♈也可看成是互相平行的。所以，瞬时参心坐标系的x轴和瞬时天球坐标系的x轴之间的夹角也是S_G。

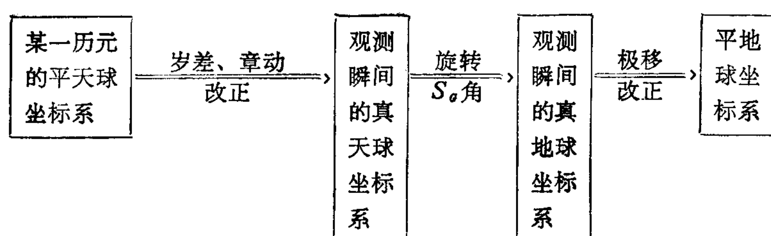
从上面的讨论可以看出，瞬时坐标系虽然不适宜用来表示天体或测站的位置，但它们却是建立天球坐标系和地球坐标系之间联系的桥梁，因而是一种重要的过渡坐标系。因为只有瞬时坐标系的z轴才和真实的地球自转轴一致，平坐标系的z轴本质上仅仅在人为规定的固定位置上，因而只有数学意义，但不和真实的地球自转轴相对应。例如历元1950.0的平天球坐标系z轴是和该历元时刻假定没有章动而仅有岁差时的平天轴重合，又如国际协议地球坐标系的z轴是指向CIO的，它仅是1900～1905年间瞬时地极的平均位置，并不和这段时间的中央时刻的瞬时极重合，甚至在这段时间内根本没有一个瞬时极是与它重合的，所以它只是人为选择的一个固定点而已。

几个常用坐标系之间的关系如下：

（4）关于经度零点的问题

前面我们已讲过地球坐标系的X轴是指向经度零点的，下面以国际协议地球坐标系"CIO-BIH"为例说明有关问题。

由于历史上有过多种选择起始子午线的办法，造成了经度值的混乱。1884年在华盛顿



召开的国际经度会议上决定，以通过英国格林尼治（Greenwich）天文台艾里（Airy）仪器中心的子午线作为全球统一的起始子午线，它和赤道的交点称为天文经度零点。但是随着科学技术的不断发展，人类知识的不断丰富，这一规定的缺点日益明显起来，主要表现在以下两个方面：

（a）由于板块运动和局部性的地壳运动，格林尼治天文台本身在地球上的位置可能无法保持固定不变，此外还不可避免地存在观测误差。因而说明由一个台站无法长期精确而稳定地维持起始子午线；

（b）由于格林尼治天文台纬度较高（51°29′），起始子午线受极移的影响很大，使天文经度零点在不断地变化。

为了解决上述问题，同时继续保持原来的经度系统，现已改由国际时间局的约50个天文台站来共同维持起始子午线，称为格林尼治平均起始子午线，或称为由平均天文台维持的格林尼治起始子午线。具体做法如下：

国际时间局的19个天文台站根据各自的经度和观测资料，求出经度零点，由国际时间局根据各台站的精度给以不同的数，求出加权平均的经度零点，将此值和格林尼治天文台求得的经度零点进行比较，求出其差值d_i，根据1954年～1956年的观测资料，求出d_i的平均值d，用此值来修正19个天文台站的经度值。显然用修正后的经度值求得的平均经度零点在1954～1956年间的总平均值和格林尼治天文台在同期求得的经度零点的总平均值是完全一致的，因而我们可以认为平均天文台仍维持着格林尼治起始子午线，当然在上述计算中均需顾及极移影响。1956年格林尼治天文台迁移至75公里以外的Herstmonceux后，即由国际时间局的平均天文台来维持起始子午线。目前参加国际时间局的天文台站已有50个左右，由平均天文台来维持起始子午线可以减少板块运动、局部地壳运动和观测误差等影响。

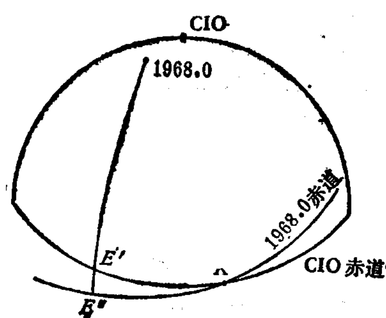


图 4-8

通过国际协用原点CIO和天文经度零点E的子午线就称为起始子午线，它和CIO赤道的交点E'称为赤道参考点，或CIO-BIH系统的经度零点。

我国采用的JYD系统1968.0的经度零点定义如下(见参考文献[5])：将通过1968.0历元平极和赤道参考点E'的子午线与1968.0所相应的赤道的交点E''，作为JYD.1968.0系统的经度零点，见图4-8，则同一点K在CIO-BIH系统中的经度值为

$'K$，在 JYD.1968.0系统中的经度值是 $E''K$。可以证明，两者仅相差 $2.2''\times10^{-9}$，所以实用上可认为这两个系统定义的经度零点虽有不同，但并不影响经度值。极移实际上也不影响赤道参考点的位置。

如果我们在进行天球坐标系和地球坐标系的转换时采用了由国际极移局 IPMS 提供的极移数值和国际时间局确定的世界时 UT1，那么求得的平地球坐标系就属于 CIO-BIH 系统，这就是采用 CIO-BIH 系统的实际意义。

最后要指出的是，起始子午线完全是人为规定的，它本身并不具有任何物理特征。在卫星大地测量中，如果仅仅对卫星进行了多普勒测量和距离测量，是无法同时确定测站的经度和卫星升交点的赤经的，这时求得的地球坐标系的经度零点从理论上讲是随意的，虽然可用某些方法加以约束，但经度零点的误差一般都较大。

§4.4 轨道坐标系

轨道坐标系是人卫轨道计算中广泛采用的一种坐标系，它实际上是一种特殊的赤道坐标系，其定义如下：坐标原点在地心；Z轴指向瞬时天极；X轴指向一个假想的春分点——准春分点，该春分点位于观测瞬时的真赤道面上，但在真春分点以东 $\mu+\Delta\mu$ 处，其中 μ 为星表历元 T_0 至观测瞬间的赤经总岁差，$\Delta\mu$ 为观测瞬间的赤经章动；Y 轴垂直于 X、Z 轴构成右手系，表示天体位置的参数为 α'、δ 和 ρ。

我们知道人卫轨道理论是以牛顿第二定律 $f=ma$ 为基础的，而牛顿第二定律只有在惯性坐标系中才成立，因而人卫轨道理论所有公式也只有在惯性坐标系中才能运用。但是由于岁差和章动，地球自转轴和赤道平面在空中的方向不断变化，因而在本章前几节的各坐标系中，除了某历元的平天球坐标系外，都是非惯性坐标系。如果在这些坐标系中计算卫星轨道，必须对原有的公式进行修正，使它们适用于非惯性系。在人卫轨道理论中常把这种修正也当作一种轨道摄动来处理，称为坐标系摄动，但这种摄动数值较大，计算麻烦，加之春分点本身又不固定，使用时也不方便，因此轨道计算不适宜在这些坐标系中进行。

某一历元（例如 1950.0）的平天球坐标系，它的三个轴在空间是固定的，因而是一个惯性坐标系（这里不计地球绕太阳的公转以及太阳系、银河系的运动，所以认为它是一个足够好的惯性系），牛顿第二定律在该系统中成立。但是地球引力场展开式的系数是相对于协议地球坐标系 CIO-BIH 的，如果不考虑固体潮、海潮、大气潮，以及地壳内部和地表的物质运动，在这个坐标系中，地球引力场系数均为常数，但是由于岁差和章动，这个坐标系在空中也在摆动，因而在某一历元的平天球坐标中，地球引力场系数是不断变化的，在计算地球引力场引起的轨道摄动时，必须加以改正。同样我们也把这项改正当作坐标系摄动来处理，设 $T_0=1950.0$，到 70 年代时这一项摄动数值就很大，相当于一阶长周期摄动，也就是说，即使在一阶摄动理论中，也必须考虑其影响。但是顾及这一项摄动，每个地球引力场系数都要有一个附加的改正，计算又十分复杂，所以在进行卫星轨道计算中也很少采用这一坐标系。

由于轨道坐标系的 Z 轴指向真天极，所以它也不是一个惯性坐标系，为了使轨道计算

的公式在该坐标系中能运用，当然也需加上坐标系摄动，但这些摄动是10^{-8}级的量，因而在一阶摄动理论中可不考虑该项摄动。即使在二阶摄动理论中加以考虑，由于它们的形式很简单，计算也很方便。

由于轨道坐标系的Z轴不是指向CIO，因而地球引力场系数在轨道坐标系中也要改变，也必须考虑由于引力场变化而引起的摄动，但该项改正也是10^{-8}级的量，在一阶摄动理论中无需考虑，在二阶摄动理论中计算也较简单。

1959年Veis提出了轨道坐标系的概念，1960年古在由秀计算了轨道坐标系中的坐标系摄动，证明了在人卫轨道计算中采用轨道坐标系可使坐标摄动的计算变得十分简单。此后，轨道坐标系便被广泛采用。

由于轨道坐标系的Z轴指向真天极，因而它也能和瞬时地球坐标系建立简单的转换关系，因为它们的Z轴重合，X轴之间相差一个夹角$\widehat{S}_G$，称为格林尼治准恒星时。此外，在轨道坐标系中，恒星时的计算十分简单，即

$$S = S_0 + \omega_e \cdot (t - t_0)$$

式中ω_e为地球自转角速度；S_0为t_0时刻的恒星时。计算t时的恒星时仅需考虑（$t-t_0$）时间内地球的自转，而不需考虑（$t-t_0$）时间内春分点的岁差和章动。

第五章　几何卫星网的建立与平差方法

§5.1　概　　述

如果不顾及人造卫星复杂的轨道运动而仅把卫星当作高空的几何目标，在两站或多个测站上利用光学摄影，激光测距和多普勒观测等方法，同时测定测站至卫星的方向、距离和距离差，从而确定待定点相对于已知点的相对位置(坐标差)，这种方法常被称为几何卫星大地测量。

在常规大地测量中，无论是进行方向观测、距离观测或测定高差（包括三角高程测量和水准测量）都有一个基本条件，即仪器和观测目标间必须保持通视。但由于地球曲率及地形、地物、植被等影响，光线通过大气层时能量被大气吸收，这种通视条件一般只有在较短的距离内才有可能达到(例如几十公里以内)，并且要付出相应代价，例如建造高标，牺牲较好的图形而将测站移至某一制高点上，清除视线上的障碍（如砍树）等等。这样做的结果，一是大大增加了测量的费用和时间，二是由于图形强度的减弱和高标观测而使精度下降，三是为保持通视有时不得不将控制点移至交通不便陡峭危险的山顶，大大增加了造标，埋石和观测工作的艰巨程度。如果说这样能解决较短距离内的通视问题，那么当距离增加到一定长度(例如几百公里)，尽管采取上述种种措施，还是无法保持通视，因此常规大地测量技术无法把相距遥远的各大陆、海岛等相互联系起来，从而组成全球统一的坐标系，致使有些国家还不得不在一个国家内建立几种局部大地坐标系。参考文献[9]中就介绍了世界各国所采用的几十个局部性大地坐标系。这种情况不但给使用带来了许多麻烦，更主要的是无法达到空间技术和远程武器对大地测量提出的要求。

几何卫星大地测量的主要用途在于：

（1）布设全球性几何卫星大地网，建立全球统一的坐标系统。

（2）布设全球网，或进行洲际联测，求出各局部大地坐标系统之间的转换关系。

（3）在将各种大地测量以及重力测量的观测成果一起进行联合平差时，几何卫星大地测量观测数据的参与将有助于提高联合解的精度，特别是网的定向精度。

（4）进行远距离海岛联测。

几何卫星大地测量在六十年代，作为当时卫星大地测量的主要方法之一，发挥过积极的作用，而且也获得了许多有意义的成果，但随后由于人卫轨道理论的不断发展及完善，由于子午卫星系统及后来的全球定位系统的出现，使得以同步摄影观测为主要观测方法的几何卫星大地测量缺点日益明显(例如精度较低，不能进行全天候观测，仪器较为笨重，费用大、观测成果的处理较为复杂等等)。现在这种方法已较少大范围使用，因此本章只着重介绍它的基本原理和方法。

§5.2　卫星大地网的建立及其特点

我们在第二章已经讲过对卫星观测方向、距离、距离差的方法和所用仪器，本节要进一步介绍计算卫星网中有关量的数学表示式。

先从观测卫星方向开始。由测站到卫星的任一方向可以用该方向在所取坐标系中的方向余弦表示，也可用测站的球面坐标 φ、λ 表示，即

$$\vec{\rho}=\begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi & \cos\lambda \\ \cos\varphi_1 & \sin\lambda \\ \sin\varphi & \end{pmatrix} \tag{5-1}$$

这两种表示方法可以互相转换，因而实际上是一致的。

以恒星为背景对高空目标 s 进行摄影观测，底片处理后可求得星表历元时在天球坐标系中测站至卫星的方向，再根据记录下来的观测时间，并顾及岁差、章动、光行差、折射视差和极移等改正后，即可求得在协议地球坐标系中测站至卫星的方向 $\vec{\rho}$。下面讨论如何按同步观测确定弦线 AB 的方向。

（1）确定 β_{s_1}：

设在测站 A、B 上对卫星 s_1 进行了同步摄影观测，求得了在协议地球坐标系中测站至卫星的方向 ρ_{A_1} 和 ρ_{B_1}（参阅图 5-1）为

$$\left.\begin{aligned} \vec{\rho}_{A_1}&=\begin{pmatrix} l_{A_1} \\ m_{A_1} \\ n_{A_1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi_{A_1} & \cos\lambda_{A_1} \\ \cos\varphi_{A_2} & \sin\lambda_{A_1} \\ \sin\varphi_{A_1} & \end{pmatrix} \\ \vec{\rho}_{B_1}&=\begin{pmatrix} l_{B_1} \\ m_{B_1} \\ n_{B_1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\varphi_{B_1} & \cos\lambda_{B_1} \\ \cos\varphi_{B_1} & \sin\lambda_{B_1} \\ \sin\varphi_{B_1} & \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{5-2}$$

则卫星 s_1 至测站 A、B 的张角，即 $\vec{\rho}_{A_1}$ 和 $\vec{\rho}_{B_1}$ 间的夹角 β_{s_1} 可用下式求得：

$$\cos\beta_{s_1}=\vec{\rho}_{A_1}\cdot\vec{\rho}_{B_1}=l_{A_1}l_{B_1}+m_{A_1}m_{B_1}+n_{A_1}n_{B_1} \tag{5-3}$$

（2）求同步平面的单位法线矢量 $\vec{n}_1$，有

$$\vec{n}_1=\frac{\vec{\rho}_{A_1}\times\vec{\rho}_{B_1}}{\left|\vec{\rho}_{A_1}\times\vec{\rho}_{B_1}\right|}=\frac{1}{\sin\beta_{s_1}}(\vec{\rho}_{A_1}\times\vec{\rho}_{B_1})$$

$$=\frac{1}{\sin\beta_{s_1}}\begin{vmatrix} i & j & k \\ l_{A_1} & m_{A_1} & n_{A_1} \\ l_{B_1} & m_{B_1} & n_{B_1} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sin\beta_{s_1}}\begin{pmatrix} m_{A_1}n_{B_1}-m_{B_1}n_{A_1}\\ l_{B_1}n_{A_1}-l_{A_1}n_{B_1}\\ l_{A_1}m_{B_1}-l_{B_1}m_{A_1}\end{pmatrix}=\frac{1}{\sin\beta_{s_1}}\begin{pmatrix}A_1\\B_1\\C_1\end{pmatrix} \tag{5-4}$$

式中 $\sin\beta_{s_1}=\sqrt{1-\cos\beta_{s_1}^2}$，可用 $\sin\beta_{s_1}=\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}$ 进行检核。

如果在测站 A、B 上对不位于同步平面 ABS_1 上的另一个卫星 s_2 也进行了同步观测，同样可求得第二个同步平面 ABS_2 的单位法线矢量 $\vec{n^2}$，即

$$\vec{n}_2=\frac{1}{\sin\beta_{s_2}}(\vec{\rho}_{A_2}\times\vec{\rho}_{B_2})=\frac{1}{\sin\beta_{s_2}}\begin{pmatrix}A_2\\B_2\\C_2\end{pmatrix} \tag{5-5}$$

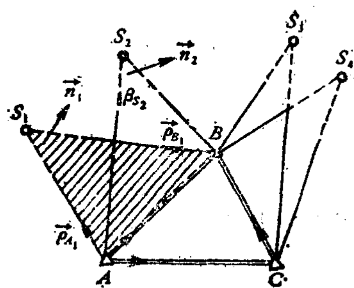


图 5-1

（3）求两个同步平面间的夹角 γ_{12}

两个同步平面 ABS_1 和 ABS_2 之间的夹角显然就等于这两个同步平面的单位法线矢量 $\vec{n}_1$ 和 $\vec{n}_2$ 之间的夹角。所以

$$\cos\gamma_{12}=\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=\frac{1}{\sin\beta_{s_1}\sin\beta_{s_2}}(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2) \tag{5-6}$$

（4）求弦线 AB 上的单位矢量 $\vec{D}_{AB}$

由于 $\vec{D}_{AB}$ 在平面 ABS_1 上，故 $\vec{n}_1\perp\vec{D}_{AB}$；由于 $\vec{D}_{AB}$ 也在平面 ABS_2 上，故 $\vec{n}_2\perp\vec{D}_{AB}$，单位矢量 $\vec{D}_{AB}$ 既垂直于 n_1 又垂直于 n_2，所以有

$$\vec{D}_{AB}=\frac{1}{\sin\gamma_{12}}(\vec{n}_1\times\vec{n}_2)=\frac{1}{\sin\beta_{s_1}\sin\beta_{s_2}\sin\gamma_{12}}\begin{vmatrix} i & j & k\\ A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sin\beta_{s_1}\sin\beta_{s_2}\sin\gamma_{12}}\begin{pmatrix}B_1C_2-C_1B_2\\ A_2C_1-A_1C_2\\ A_1B_2-A_2B_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E_{AB}\\F_{AB}\\G_{AB}\end{pmatrix} \tag{5-7}$$

式中 $\sin\gamma_{12}=\sqrt{1-\cos^2\gamma_{12}}$，因为 $\gamma_{12}<180°$，所以 $\sin\gamma_{12}$ 恒取正值。

确定了弦线 AB 上的单位矢量 $\vec{D}_{AB}$，也就是确定了弦线 AB 的方向。实际观测时同步平面的个数往往远多于 2 个，应平差求出弦线方向的最或是值。

如果在相距遥远互不通视的测站 A，C 之间也用同样的方法测定了弦线 AC 的单位矢量 $\vec{D}_{AC}$，则弦线 AB 和弦线 AC 之间的夹角 $\angle BAC$ 可用下式计算：

$$\angle BAC=\arccos(\vec{D}_{AB}\cdot\vec{D}_{AC}) \tag{5-8}$$

利用上面所说的卫星方向测量法可以求得几何卫星大地网中所有的弦方向及三角形内角（参阅图 2-6）而构成一个方向网，为了确定网的大小，显然至少需要测定其中一条弦的长度，以便为全网提供一个尺度因子。如果能在网中以适当的间距较均匀地测定几条起始边，则可建立基线条件，控制误差累积，提高人卫大地网的精度。测定弦长可采用下列

几种方法：

（1）加入激光测卫资料

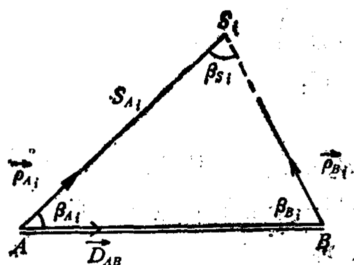


图 5-2

若在进行第 i 对同步摄影观测的同时，至少在一个测站，例如测站 A 上，还对该卫星进行了同步激光观测，测定了测站 A 至卫星的距离 s_{A_i}，就可求得弦长 AB（见图 5-2）。

由于弦线 AB 及测站 A、B 至卫星的方向均为已知，即单位矢量 $\vec{D}_{AB}$，$\vec{\rho}_{A_i}$，$\vec{\rho}_{B_i}$ 已知，因而可按下式求出 $\triangle ABS_i$ 中的夹角 β_{B_i} 和 β_{S_i}，即

$$\left.\begin{aligned}\beta_{S_i}&=\cos^{-1}(\rho_{A_i}\cdot\rho_{B_i})\\ \beta_{B_i}&=\cos^{-1}(-D_{AB}\cdot\rho_{B_i})\end{aligned}\right\}\tag{5-9}$$

则弦长 AB 为

$$AB=S_{A_i}\cdot\frac{\sin\beta_{S_i}}{\sin\beta_{B_i}}\tag{5-10}$$

如果在 A、B 两测站上同时对卫星 S 进行了摄影观测和激光观测，测得了测站至卫星的方向 ρ_A，ρ_B 以及距离 S_A、S_B，那么只用这个同步三角形的资料，即可求得弦长 AB，见图 5-3 所示。

$$AB=\sqrt{S_A^2+S_B^2-2S_AS_B\cos\beta_s}$$

式中

$$\cos\beta_s=\vec{\rho}_A\cdot\vec{\rho}_B$$

利用上述方法不仅可以确定弦长，还可确定弦方向，用矢量表达式更为清楚，即

$$\vec{AB}=\vec{AS}-\vec{BS}=S_A\cdot\vec{\rho}_A-S_B\vec{\rho}_B=AB\cdot\vec{D}_{AB}$$

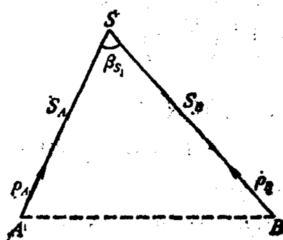


图 5-3

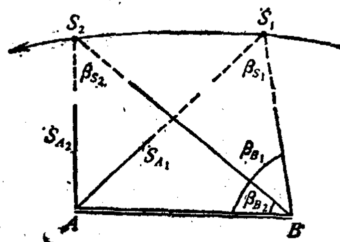


图 5-4

（2）加入多普勒观测资料

如图 5-4 所示，若 A、B 两站除对两个卫星点 S_1，S_2（或更多的卫星点）进行了同步摄影观测，求得了测站至卫星的方向和测站间的弦线方向外，还至少在一个测站上（例如测站 A）进行了多普勒观测求得测站至两个同步摄影点 S_1，S_2 间的距离差 $\Delta S_A=S_{A_1}-$

S_{A_2}，则由

$$S_{A_1}=AB\frac{\sin\beta_{B_1}}{\sin\beta_{S_1}}$$

$$S_{A_2}=AB\frac{\sin\beta_{B_2}}{\sin\beta_{S_2}}$$

可得

$$\Delta S_A=S_{A_1}-S_{A_2}=AB\left(\frac{\sin\beta_{B_1}}{\sin\beta_{S_1}}-\frac{\sin\beta_{B_2}}{\sin\beta_{S_2}}\right)$$

所以

$$AB=\frac{\Delta S_A}{\left(\frac{\sin\beta_{B_1}}{\sin\beta_{S_1}}-\frac{\sin\beta_{B_2}}{\sin\beta_{S_2}}\right)} \tag{5-11}$$

用这种方法测定的弦长精度较差，所以较少使用。

（3）利用地面测量资料直接测定起始边

在人卫网起始边的两端间布设高精度零级导线或一级导线，并进行水准测量和天文重力水准测量，直接测定起始边的长度，例如BC-4全球性几何卫星大地网就采用了这种方法。

A、B两站的空间直角坐标可按下式求得：

$$\left.\begin{aligned}X&=(N+H)\cos B\cos L\\Y&=(N+H)\cos B\sin L\\Z&=[N(1-e^2)+H]\sin B\end{aligned}\right\} \tag{5-12}$$

式中B、L为测站的大地经纬度，可从高精度导线的结果中求得，大地高$H=h_{正常高}+\zeta=h_{正高}+N$，其中$h_{正高}$(或$h_{正常高}$)，高程异常ζ(或大地水准面差距N)，可由天文测量和重力测量资料采用天文重力水准的方法求得。弦线$AB=[(X_B-X_A)^2+(Y_B-Y_A)^2+(Z_B-Z_A)^2]^{\frac{1}{2}}$，由于弦线长和坐标系统无关，因而全球性的几何卫星大地网中的各条起始边可以采用不同的局部大地坐标系来计算。

用这种方法测定起始边，需要天文、重力、大地（平面、高程）的资料，内外业的工作量都很大，若仅仅为了提供人卫网起始边而布设长达几千公里的高精度导线，在经济上显然是不合理的，因而这种方法通常是需要满足多种用途的情况下才采用。

（4）利用其它空间大地测量方法测定弦长：

用甚长基线干涉测量方法，动力卫星大地测量方法，全球定位系统定位方法等，也可直接或间接测定起始边长度，用这些方法测定的弦长精度较高，工作量也不很大，因而是比较理想的方法。

用卫星方向测量法测定全部弦方向，再利用上述方法测定若干条起始边，然后根据某一起始点的已知坐标便可解得网中各测站的坐标，这就是建立几何卫星大地网的原理、方

法和全过程。可以看出，几何卫星大地测量有下列特点：

（1）全部公式推导过程中都是以同步观测为基本前题的，不进行同步观测就无法组成同步三角形，各种几何关系也将不能成立，因而同步观测是几何卫星大地测量的基本特点之一；

(2) 卫星只是各站进行同步观测的高空目标，各被测卫星点之间可以不发生联系，这样就不需要涉及人卫轨道理论，无需知道各卫星点空间坐标；

（3）数学公式简单，计算方便，而且可以同时求得测站的平面位置和高程（或空间直角坐标X、Y、Z），获得三维解；

（4）几何卫星大地测量本身只能求得弦方向及弦长，即只能求得测站间的坐标差，还必须确定网中某测站的坐标，才能求得其余各站的坐标，这和常规大地测量十分相似。因此几何卫星大地测量本身不能给出测站的地心坐标，网中各点的坐标属于起始点的坐标系统。如果有二个或二个以上的起始点，则可产生坐标条件；

（5）几何卫星大地测量中不要求各测站间相互通视，只要弦线两端的测站在满足最小高度角条件的情况下能同时观测到卫星，如果发射几个具有不同轨道根数（例如倾角i不同）的测地卫星，则满足观测条件布设全球网就能做到。

§5.3 空间人卫大地网的图形结构和精度分析

空间人卫大地网的精度不仅取决于观测精度，也和网的图形结构有关。加强图形强度，尽可能满足最有利的观测条件，是提高空间人卫大地网精度的有效办法。但是要严格分析不同的图形结构如何影响网的精度是比较困难的，只能对图形结构和网的精度之间的关系作一些初步分析，从而得出建立空间人卫大地网的一些基本要求。本节分别从利用恒星三角测量法测定弦方向和利用同步激光观测测定弦长这两个方面来分析。

(一) 利用恒星三角测量法测定弦方向

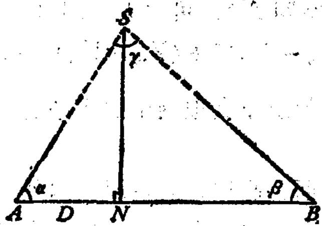


图 5-5

如图5-5所示，在A、B两站对卫星S进行同步观测测定弦方向AB时，可按下式加权：

$$P_i=\frac{1}{m_{AB}^2}=\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha(m_B^2)+\sin^2\beta(m_A^2)} \tag{5-13}$$

从上式可以看出，卫星至两测站的张角γ越大越有利，也就是说卫星的高度越低越有利。但另一方面，卫星的高度过低时大气折光又会严重影响观测精度，使式中的方向中误差m_A和m_B增加，所以只能要求两站的高度角均不小于某个限值（一般取15°～20°），在这种情况下，γ角的取值一般不宜大于130°～140°。

从（5-13）式还可以看出，弦方向的测定精度不仅和卫星的高度有关，还和卫星相对于A、B两站的位置有关。可以证明，当卫星在AB上的垂足N到A站的距离D满足下列条件如，弦方向的测定精度最高。

$$D=\frac{K^2(AB)}{1+K^2} \tag{5-14}$$

式中$K=\frac{m_B}{m_A}$。当两站的观测精度相同，即$m_A=m_B$时，$K=1$，$D=\frac{1}{2}AB$，这就是说，若A、B两站的观测精度相同，当卫星位于弦线AB的中垂面上时，测定弦方向最为有利，图 5-6 给出了A、B两站对位于不同高度和不同位置的卫星进行观测时，该同步平面在测定弦方向时的权。至于(5-14)式所提出的条件，可以通过卫星预报，选择合适的同步观测时刻来达到。

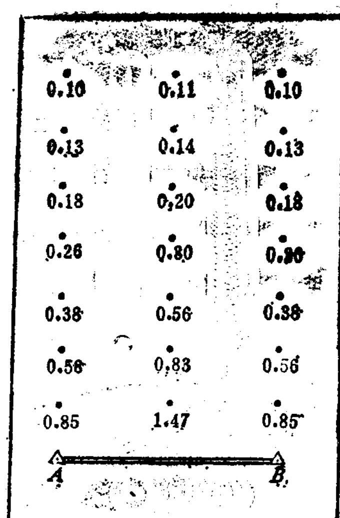


图 5-6

从 (5-7) 式可以看出，利用两个同步面测定弦方向时，两平面的交角为 90° 时最为有利。但实际上为了提高弦方向的测定精度，往往要观测几十个甚至几百个同步平面。这时要求各同步平面能对称地均匀分布在弦线两测，以避免可能出现系统误差，外侧的两个同步平面间要求有较大的夹角。

和传统大地测量中的情况一样，为了使边长的传递误差较小，又有较好的图形，网中各夹角应在 60°左右，可在 30°～120°的范围内变动。

（二）利用同步激光观测测定弦长

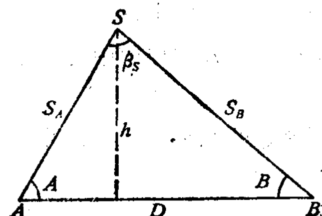


图 5-7

上节所述的四种测定弦长的方法中，第(3)、(4)两种方法是用其它观测手段提供的弦长作为网的起始边，弦长的精度与网本身的结构无关。第二种方法因为精度较差，很少使用，故也不去讨论。这里以激光观测确定弦长为例，讨论空间人卫网取怎样的图形最为有利。

如图 5-7 所示，利用余弦定理可求得弦长D为

$$D^2=S_A^2+S_B^2-2S_AS_B\cos\beta_S$$

$$\cos\beta_S=\vec{\rho}_A\cdot\vec{\rho}_B$$

根据误差传播定律，有

$$m_D=\frac{1}{D}\left[(S_A-S_B\cos\beta_S)^2m_{SA}^2+(S_B-S_A\cos\beta_S)^2m_{SB}^2+\left(S_AS_B\sin\beta_S\cdot\frac{m''_{\beta_S}}{\rho''}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=\sqrt{\cos^2Am_{SA}^2+\cos^2Bm_{SB}^2+\left(S_B\sin\beta\frac{m''_{\beta_S}}{\rho''}\right)^2} \tag{5-15}$$

若两站的激光观测精度相同，令 $m_{S_A}=m_{S_B}=m_S$，则上式可简化为

$$m_D=\sqrt{(\cos^2 A+\cos^2 B)m_S^2+\left(S_B\sin B\,\frac{m''_{\beta_S}}{\rho''}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(\cos^2 A+\cos^2 B)m_S^2+\left(h\,\frac{m''_{\beta_S}}{\rho''}\right)^2} \qquad (5\text{-}16)$$

从（5-16）式可知，影响弦长 AB 测定精度的因素较多，除了和卫星的高度以及卫星相对于 A，B 两站的位置有关外，还和 m_S，m_{β_S}的值有关。下面我们通过几个具体的例子加以讨论。

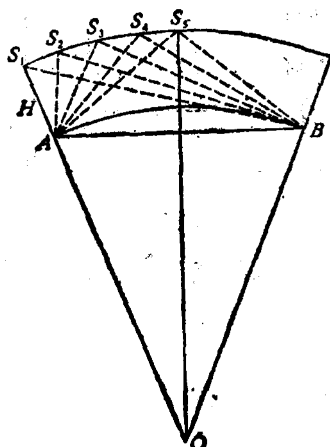


图 5-8

设 $AB=1975.4\text{km}$，为了讨论卫星高度对弦长测定精度的影响，分别计算了卫星高度 $H=500\text{km}$，1000km，和 2000km 时的 m_D。为了讨论卫星的位置对弦长测定精度的影响，分别计算了当卫星位于图 5-8 中的 $S_1\sim S_5$ 时求得的弦长 D 的中误差 m_D。为了讨论测距精度和方向观测精度对最后结果的影响，分别就以下四种情况对 m_D 进行了计算：

（1） $m_S=1.5\text{m}$ $m_{\beta_S}=1''$

（2） $m_S=1.5$ $m_{\beta_S}=0.3''$

（3） $m_S=0.2$ $m_{\beta_S}=1''$

（4） $m_S=0.2$ $m_{\beta_S}=0.3''$

为了计算方便，在计算中作了以下近似：把地球看成是半径为 6370km 的圆球，卫星轨道为圆轨道，卫星位于过 A，B 和地球中心的平面上。计算结果见表 5-1。

从表中可以看出：从测定边长的角度来看，等腰三角形并不是好的图形，但是同步三角形的形状对弦长的测定精度的影响并不显著，在 $S_1\sim S_5$ 的五种情况中的 m_D 相差仅为 10% 左右。为了有利于测定弦方向并使两站都能满足高度角条件，所以在边角同测网中同步三角形的形状仍应接近等腰三角形。

从表中还可以看出，提高方向观测的精度能大大提高弦长的测定精度，但提高测距精度对提高弦长的测定精度的作用却不显著，因此提高测边精度的关键在于提高摄影观测的精度。

卫星高度对测边精度的影响异常明显，下面我们进一步讨论。由于同步三角形的形状对测边精度影响不大，为方便起见，设同步三角形为等腰三角形，此时式（5-16）可进一步简化为

$$m_D=\sqrt{(1-\cos\beta_S)m_S^2+\left(h\cdot\frac{m''_{\beta_S}}{\rho''}\right)^2}$$

仍采用上面的例子，对不同的 β_S 进行计算，如表（5-2）及图 5-9 所示。

表 5-1

	m_D(m)					
		S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
$H=500$km	∠A	98.9°	70.5°	50.8°	38.4°	30.3°
	∠B	13.5°	16.5°	20.1°	24.5°	30.3°
	$m_s=1.5$m (1) $m_{B_s}=1''$	2.81m	2.99m	3.19m	3.31m	3.34m
	$m_s=1.5$m (2) $m_{B_s}=0.3''$	1.64	1.71	1.88	1.98	2.01
	$m_s=0.2$m (3) $m_{B_s}=1''$	2.40	2.58	2.71	2.78	2.81
	$m_s=0.2$m (4) $m_{B_s}=0.3''$	0.74	0.80	0.84	0.87	0.87
$H=1000$km	∠A	98.9°	82.8°	68.5°	56.8°	47.5°
	∠B	24.9°	29.1°	34.0°	40.0°	47.5°
	(1)	4.98m	5.15m	5.29m	5.38m	5.41m
	(2)	1.99	2.00	2.05	2.10	2.12
	(3)	4.79	4.98	5.12	5.20	5.22
	(4)	1.45	1.50	1.55	1.57	1.58
$H=2000$km	∠A	98.9°	89.6°	80.7°	72.3°	64.6°
	∠B	40.8°	45.8°	51.4°	57.6°	64.6°
	(1)	9.65m	9.85m	10.00m	10.08m	10.11m
	(2)	3.10	3.12	3.14	3.15	3.16
	(3)	9.58	9.79	9.95	10.04	10.07
	(4)	2.88	2.94	2.99	3.01	3.02

m_D表　　表 5-2

i \ B_s	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°
(1)	18.1m	11.7m	8.5m	6.4m	5.1m	4.1m	3.3m	2.8m	2.4m
(2)	5.5	3.6	2.7	2.3	2.1	1.97	2.02	2.01	2.1
(3)	18.1	11.7	8.4	6.3	4.9	3.7	2.8	2.0	1.3
(4)	5.4	3.5	2.5	1.9	1.5	1.1	0.9	0.7	0.5

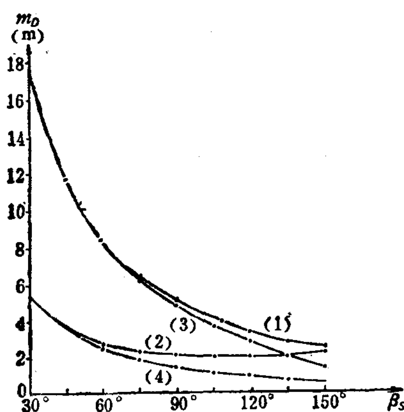


图 5-9

从表 5-2 和图 5-9 可以看出，最佳的 β_S 值与 m_S 和 m_{β_S} 的取值有关。在情况（2）中（$m_S=1.5''$，$m_{\beta_S}=0.3''$），$\beta_S=105°$ 时 m_D 最小，因而在实际工作中可以根据实际测距精度和摄影观测精度求出 m_D 曲线来确定 β_S 的范围。但情况（2）是一个很极端的例子，0.3″是目前摄影观测的最高精度，一般很难达到，但测距精度优于 1.5m 却是较容易做到的。因而一般说来，卫星的张角 β_S 越大，即卫星越低对测定弦长越有利，但当 $\beta_S\geq135°$ 时，测距精度的提高比较缓慢，而且两站也难以同时满足高度角条件，因此一般认为 $\beta_S\leq135°$ 较为合适。为了保证弦长有较高的精度，β_S 必须大于 60°，最好能大于等于 90°。

从以上讨论的结果可以看出，建立空间人卫大地网一般应满足以下要求：

（1）在满足高度角条件的情况下，应观测尽可能低的卫星，卫星的张角 β_S 必须大于 60°，最好能大于 90°，但应小于 135°；

（2）两站观测精度相同时，同步三角形的形状以接近于等腰三角形为好，两站观测精度若不同，卫星的位置应尽量满足式(5-14)；

（3）各同步观测平面应均匀对称地分布在弦线的左右两侧，并有较大的幅度；

（4）对几何卫星大地网的图形要求，和地面三角测量网类似，三角形的内角应为 60°左右，一般允许在 30°～120°内变动。

实际上，布设空间人卫大地网时，几何图形可能十分复杂。例如，可能出现三站、四站同步观测，这时对卫星高度的要求就与（1）中提出的要求不尽相同，所以对于特殊的图形还可提出特殊要求，限于篇幅，此处不再一一介绍。此外，由于摄影观测和激光观测受到气候条件，天光条件等许多因素的限制，同步观测的机会并不是很多，因而有时为了在短时期内获得尽可能多的观测资料，往往并不能严格遵守最有利的观测条件，而只能是在可能的情况下，尽量争取求得精度最好的结果。

§5.4 空间人卫网按间接观测平差法平差

按间接观测平差法对空间人卫网进行平差，首先需要建立观测值 α、δ、S、ΔS 的改正数与未知数（X，Y，Z）的改正数之间的关系，并列出误差方程式。

一、方向观测值 α、δ 的误差方程式为

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \operatorname{arc\,tg}\frac{Y_s-Y}{X_s-X}\\ \delta &= \operatorname{arc\,tg}\frac{Z_s-Z}{\sqrt{(X_s-X)^2+(Y_s-Y)^2}}\end{aligned}\right\}\qquad(5\text{-}17)$$

将上面第一式用泰勒级数展开，得

$$\alpha_0+V_\alpha=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Y_s-Y}{X_s-X}\right)_0+\frac{\partial\alpha}{\partial X_s}dX_s+\frac{\partial\alpha}{\partial Y_s}dY_s+\frac{\partial\alpha}{\partial X}dX+\frac{\partial\alpha}{\partial Y}dY$$

令

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\alpha}{\partial X_s}&=-\frac{\rho''\sin\alpha}{S\cos\delta}=-a_1\\ \frac{\partial\alpha}{\partial Y_s}&=\frac{\rho''\cos\alpha}{S\cos\delta}=b_1\\ \frac{\partial\alpha}{\partial X}&=\frac{\rho''\sin\alpha}{S\cos\delta}=a_1\\ \frac{\partial\alpha}{\partial Y}&=-\frac{\rho\cos\alpha}{S\cos\delta}=-b_1\end{aligned}\right\}\tag{5-18}$$

而自由项

$$l_\alpha=\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Y_s-Y}{X_s-X}\right)_0-\alpha_0$$

则 α 的误差方程式为

$$V''_\alpha=-a_1dX_s+b_1dY_s+a_1dX-b_1dY+l''_\alpha\tag{5-19}$$

上式的权为 p_α。若用方向余弦表示，因

$$\left.\begin{aligned}\sin\alpha&=\frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}},\quad \sin\delta=n\\ \cos\alpha&=\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}},\quad \cos\delta=\sqrt{1-n^2}\end{aligned}\right\}\tag{5-20}$$

则用方向余弦表示的 α 误差方程式为

$$V''_\alpha=\frac{\rho''}{S\sqrt{1-n^2}\ \sqrt{l^2+m^2}}\cdot(-mdX_s+ldY_s+mdX-ldY)+l''_\alpha\tag{5-21}$$

将（5-17）式的第二式用泰勒级数展开，得

$$V_\delta=\frac{\partial\delta}{\partial X_s}dX_s+\frac{\partial\delta}{\partial Y_s}dY_s+\frac{\partial\delta}{\partial Z_s}dZ_s+\frac{\partial\delta}{\partial X}dX+\frac{\partial\delta}{\partial Y}dY+\frac{\partial\delta}{\partial Z}dZ+l\delta$$

令

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\delta}{\partial X_s}&=-\frac{\rho''\sin\delta\cos\alpha}{S}=-c_1\\ \frac{\partial\delta}{\partial Y_s}&=-\frac{\rho''\sin\delta\sin\alpha}{S}=-d_1\\ \frac{\partial\delta}{\partial Z_s}&=\frac{\rho\cos\delta}{S}=e_1\\ \frac{\partial\delta}{\partial X}&=\frac{\rho\sin\delta\cos\alpha}{S}=c_1\\ \frac{\partial\delta}{\partial Y}&=\frac{\rho\sin\delta\sin\alpha}{S}=d_1\\ \frac{\partial\delta}{\partial Z}&=\frac{-\rho\cos\delta}{S}=-e_1\end{aligned}\right\}\tag{5-22}$$

自由项

$$l_\delta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{Z_s - Z}{\sqrt{(X_s - X)^2 + (Y_s - Y)^2}}\right)_0 - \delta_0$$

则 δ 的误差方程式为

$$V_\delta = -c_1 dX_s - d_1 dY_s + e_1 dZ_s + c_1 dX + d_1 dY - e_1 dZ + l_\delta \tag{5-23}$$

此式的权为 p_δ。若用方向余弦表示则可写为

$$V_\delta = \frac{\rho'' n}{S\sqrt{l^2 + m^2}}(-l dX_s - m dY_s + l dX + m dY) + \frac{\rho\sqrt{1-n^2}}{S}(dZ_s - dZ) + l_\delta \tag{5-24}$$

与条件观测时一样，为了高精度确定同步时刻，引入同步时刻改正数 Δt，设 K_α 和 K_δ 分别为 α、δ 的变率，则 $\Delta\alpha = K_\alpha \Delta t$；$\Delta\delta = K_\delta \Delta t$，此时误差方程式为

$$\left.\begin{aligned}
V_\alpha &= \frac{\rho''}{S\sqrt{1-n^2}\ \sqrt{l^2+m^2}} \\
&\quad \cdot(-m dX_s + l dY_s + m dX - l dY) + K_\alpha \Delta t + l_\alpha \\
V_\delta &= \frac{\rho'' n}{S\sqrt{l^2+m^2}}(-l dX_s - m dY_s + l dX + m dY) \\
&\quad + \frac{\rho''\sqrt{1-n^2}}{S}(dZ_s - dZ) + K_\delta \Delta t + l_\delta
\end{aligned}\right\} \tag{5-25}$$

二、距离观测量 S 的误差方程式

因

$$S = \sqrt{(X_s - X)^2 + (Y_s - Y)^2 + (Z_s - Z)^2}$$

则

$$\left.\begin{aligned}
S_0 + V_s &= \frac{\partial S}{\partial X_s} dX_s + \frac{\partial S}{\partial Y_s} dY_s + \frac{\partial S}{\partial Z_s} dZ_s \\
&\quad + \frac{\partial S}{\partial X} dX + \frac{\partial S}{\partial Y} dY + \frac{\partial S}{\partial Z} dZ \\
&\quad + (X_s - X)_0^2 + (Y_s - Y)_0^2 + (Z_s - Z)_0^2 \\
\frac{\partial S}{\partial X_s} &= \frac{X_s - X}{S} = l \\
\frac{\partial S}{\partial Y_s} &= \frac{Y_s - Y}{S} = m \\
\frac{\partial S}{\partial Z_s} &= \frac{Z_s - Z}{S} = n \\
\frac{\partial S}{\partial X} &= -\frac{X_s - X}{S} = -l, \quad \frac{\partial S}{\partial Y} = \frac{Y_s - Y}{S} = -m \\
\frac{\partial S}{\partial Z} &= -\frac{Z_s - Z}{S} = -n
\end{aligned}\right\} \tag{5-26}$$

$$l_S=\sqrt{(X_S-X)_0^2+(Y_S-Y)_0^2+(Z_S-Z)_0^2}-S_0$$

距离观测值 S 的误差方程式为

$$V_S=ldX_S+mdY_S+ndZ_S-ldX-mdY-ndZ+l_S \tag{5-27}$$

此式的权为 P_S。

三、距离差 ΔS的误差方程式

若在测站上进行了多普勒观测，测定了测站至两个卫星点的距离之差ΔS，以下讨论如何建立距离差 ΔS 的误差方程式。

因为

$$\Delta S=S_1-S_2=\sqrt{(X_{S_1}-X)^2+(Y_{S_1}-Y)^2+(Z_{S_1}-Z)^2}$$
$$-\sqrt{(X_{S_2}-X)^2+(Y_{S_2}-Y)^2+(Z_{S_2}-Z)^2}$$

故

$$V_{\Delta S}=\frac{\partial\Delta S}{\partial X_{S_1}}dX_{S_1}+\frac{\partial\Delta S}{\partial Y_{S_1}}dY_{S_1}+\frac{\partial\Delta S}{\partial Z_{S_1}}dZ_{S_1}+\frac{\partial\Delta S}{\partial X_{S_2}}dX_{S_2}$$
$$+\frac{\partial\Delta S}{\partial Y_{S_2}}dY_{S_2}+\frac{\partial\Delta S}{\partial Z_{S_2}}dZ_{S_2}+\frac{\partial\Delta S}{\partial X}dX+\frac{\partial\Delta S}{\partial Y}dY$$
$$+\frac{\partial\Delta S}{\partial Z}dZ+l_{\Delta S}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Delta S}{\partial X_{S_1}}=l_1,\quad \frac{\partial\Delta S}{\partial X_{S_2}}=-l_2\\
&\frac{\partial\Delta S}{\partial X}=-l_1+l_2=f_1\\
&\frac{\partial\Delta S}{\partial Y_{S_1}}=m_1,\quad \frac{\partial\Delta S}{\partial Y_{S_2}}=-m_2\\
&\frac{\partial\Delta S}{\partial Y}=-m_1+m_2=g_1\\
&\frac{\partial\Delta S}{\partial Z_{S_1}}=n_1,\quad \frac{\partial\Delta S}{\partial Z_{S_2}}=-n_2\\
&\frac{\partial\Delta S}{\partial Z}=-n_1+n_2=h_1
\end{aligned}\right\} \tag{5-28}$$

$$\Delta S=\sqrt{(X_{S_1}-X)_0^2+(Y_{S_1}-Y)_0^2+(Z_{S_1}-Z)_0^2}$$
$$-\sqrt{(X_{S_2}-X)_0^2+(Y_{S_2}-Y)_0^2+(Z_{S_2}-Z)_0^2}-\Delta S_0$$

于是距离差 ΔS 的误差方程式可写为

$$V_{\Delta S}=l_1dX_{S_1}+m_1dY_{S_1}+n_1dZ_{S_1}-l_2dX_{S_2}-m_2dY_{S_2}$$

$$-n_2dZ_{s_2}+f_1dX+g_1dY+h_1dZ+l_{\Delta s} \tag{5-29}$$

此式的权为 $p_{\Delta s}$。

（四）权的确定

设方向观测的中误差为 m_α、m_δ，距离观测的中误差为 m_S，距离差观测的中误差为 $m_{\Delta S}$，它们可以取自将某一时间间隔内的一系列观测值归算为同步时刻的虚拟观测值的平差计算结果，也可采用从同类型的大量资料分析中得出的经验数据。根据权与中误差的平方反比关系，可得

$$\left.\begin{aligned} p_\alpha=\frac{\mu}{m_\alpha^2}, \qquad p_\delta=\frac{\mu}{m_\delta^2} \\ p_S=\frac{\mu}{m_S^2}, \qquad p_{\Delta S}=\frac{\mu}{m_{\Delta S}^2} \end{aligned}\right\} \tag{5-30}$$

若令 $\qquad p_\delta=1$

即 $\qquad \mu=m_\delta^2$

将距离误差 m_S，$m_{\Delta S}$分别表示为 $\frac{m_S}{S}\rho''$，$\frac{m_{\Delta S}}{\Delta S}\rho''$，则得

$$\left.\begin{aligned} p_\alpha=\frac{m_\delta^2}{m_\alpha^2}; \qquad p_\delta=1; \\ p_S=\frac{m_\delta^2S^2}{\rho^2m_S^2}; \qquad p_{\Delta S}=\frac{m_\delta^2\Delta S^2}{\rho^2m_{\Delta S}^2} \end{aligned}\right\} \tag{5-31}$$

需要指出的是，由于各种观测都存在系统误差，将某一时间间隔内的观测值归算为同步时刻的虚拟观测时，求得的中误差大体上相当于测站平差求出的中误差。它所反映的主要是内部符合精度，这种精度究竟在多大程度上可以反映其实际精度很难断定，因此在光学摄影资料，激光资料和多普勒资料的联合平差中，确定权是一个很困难的问题，有时需要在平差过程中不断对资料进行分析并加以调整。

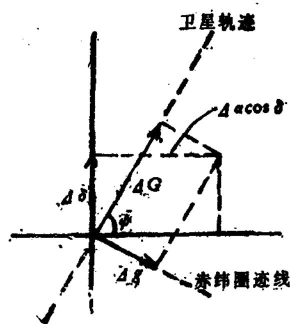


图 5-10

（五）α 和 δ 的相关性问题。

在上面的讨论中，无论是条件观测平差或间接观测平差，我们都把 α 和 δ 认为是互相独立的随机变量，但实际上它们是彼此相关的，所以严格地说用 α 和 δ 作变量时应采用相关平差，或者用真正相互独立的两个变量来代替它们。

根据大量实测资料的分析表明，在底片上量测卫星位置时，沿迹误差和垂迹误差是相互独立的，它们和 α、δ 的关系如图 5-10 所示。图中虚线表示卫星的视轨迹，ΔG 为沿迹方向的真误差，Δg 为垂迹方向的真误差，ψ 为卫星的视轨迹和赤纬圈之间的夹角，于是有以下的真误差关系式：

$$\begin{pmatrix}\Delta\alpha\cos\delta\\ \Delta\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi\\ \sin\psi & -\cos\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta G\\ \Delta g\end{pmatrix}$$

根据方差传播定律，可得

$$\begin{pmatrix}\sigma_\alpha^2\cos\delta & \sigma_\alpha\cos\delta\\ \sigma_\alpha\cos\delta & \sigma_\delta^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi\\ \sin\psi & -\cos\psi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sigma_G^2 & 0\\ 0 & \sigma_g^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi\\ \sin\psi & -\cos\psi\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}\sigma_G^2\cos^2\psi+\sigma_g^2\sin^2\psi & (\sigma_G^2-\sigma_G^2)\sin\psi\cos\psi\\ (\sigma_G^2-\sigma_g^2)\sin\psi\cos\psi & \sigma_G^2\sin^2\psi+\sigma_g^2\cos^2\psi\end{pmatrix} \tag{5-32}$$

由此可见，$\alpha\cos\delta$ 和 δ 的协方差并不为零，因而在严密平差中可用 V_G 和 V_g 来代替 V_α 和 V_δ，它们之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}V_\alpha&=(V_G\cos\psi+V_g\sin\psi)\sec\delta\\ V_\delta&=V_G\sin\psi-V_g\cos\psi\end{aligned}\right\} \tag{5-33}$$

最后再说明一下确定几何人卫大地网的绝对坐标的问题。如前所述，几何卫星大地测量不能提供点的绝对坐标，因而必须由动力卫星大地测量来提供其中的一个点或几个点的绝对坐标作为起算数据。国外的卫星大地测量工作中，常把用几何法求得的弦方向和弦长与动力法资料一并平差，以便获得统一的较为准确的结果。

第六章　子午卫星多普勒定位原理

§6.1　子午卫星系统

6.1.1　子午卫星

子午卫星系统（Transit）是专供全球各地有接收机设备的用户按测量多普勒频移方法进行导航定位或大地点定位的一种卫星系统，是由美国海军组织研制并由海军天文航行组负责管理维护的，故又称海军导航卫星系统（NNSS）。该系统1958年12月开始设计，1964年1月正式运转，前后化了六年时间，试验阶段以及正式运转后的头三年全为军用，1967年7月解密，供全球各种用户使用。利用这个卫星系统定位，不论在地球表面什么地方，什么气候条件，一小时内就能及时定出所在点位置，而且是属于地心坐标系的坐标。观测结果的精度可高可低，随所观测的卫星经过测站的次数多少而定，通常观测一次经过定出的海船位置其精度低于500m，在陆地上，在一个测站停留几天，可测得多次卫星经过，利用许多次卫星经过的观测值求得的点位，精度可大大提高。例如观测卫星通过40次以上，用精密星历，可获优于1m结果，参见图6-1。因此这个卫星系统常被誉为是一种简便可靠的高精度全天候全球导航卫星系统。

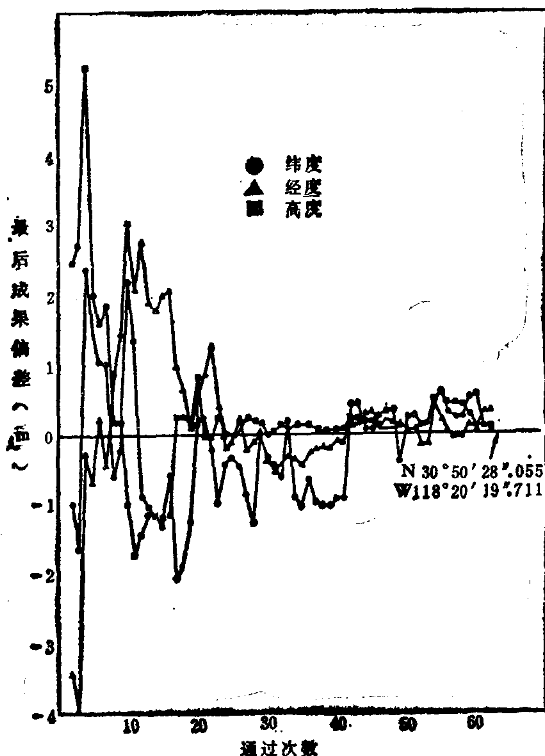


图 6-1

研制这个卫星系统起主导作用的是美国霍普金斯（Johns Hopkins）大学应用物理实验室（APL），当初列有三个方面的课题：一是研制适用的空间飞行器（卫星），二是研究地球重力场模型以便精确测定卫星轨道，三是研制用户设备以便求得导航定位结果。这些研究内容的最初设想以及大部分实际研制工作都在APL进行，并且到现在APL还继续对该系统的维护与改进给予技术上的支持。

1. 卫星

子午卫星系统的空间飞行器是一组卫星星群，见图2-23。这些卫星全都运动在近于圆的极轨道（$i=90°$）上，离地面的高度约1075km，绕地球一圈的时间为107分钟。六个卫星

的极轨道形成了一个“鸟笼”（见图2-23(a)），地球位于鸟笼中央。可以想像，随着地球自转，我们会依次越过每个轨道，每当卫星飞到我们地平以上时，我们就能有一次观测它用于定自己点位的机会。等待卫星到来的时间长短，随纬度的高低而不同，一般约在35～100分钟之间，纬度越高时间越短。不过由于轨道面的进动，等待时间是要变的，最长时间也会达10～12小时。

组成星群的卫星有两种：一种是早期（1963年）设计的奥斯卡（OSCAR）卫星，见图2-23(*b*)；另一种是新型的诺瓦（NOVA）卫星，见图2-23(*c*)，1979年设计制造，1981年4月发射诺瓦1号入轨。NOVA卫星的性能大大优于OSCAR卫星，并且可以控制它的轨道面进动在一个很小的数量上，因此计划发射两个形成轨道面正交的NOVA卫星，以作为整个子午卫星群的骨架。

目前在轨的子午卫星有六个，轨道在空间分布的情况见图6-2，该图是从地球北极上空俯视的情形，由于轨道有进动（进动速率的大小及方向图中已标出），各轨道间的疏密是变化的，这张图是1988年1月1日的情况。六个卫星的编号分别为30110，30130，30200，30480(NOVA-1)，30500(NOVA-3)，30240，其中30110又特称为TRANSAT，它是1977年美国海军为其他目的而发射的，它虽然也可起子午导航星的作用，但一般不供民用，由海军控制，必要时就关闭。

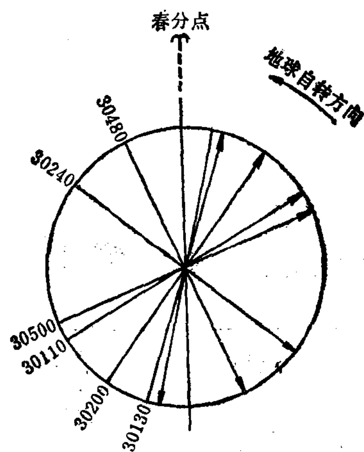


图 6-2

由图6-2可见，由于轨道面进动，且方向不完全一致，可能会出现某几个卫星逐渐挤在一起形成共面的情形，需要调整。例如1981年5月曾指令30110卫星改变过它的方位。但这种情形还会出现，必要时还要调整。从用户的观点说，希望能形成均匀分布。

OSCAR卫星和NOVA卫星的基本功能大致相同，都是采用重力梯度稳定方式，都是用150MHz和400MHz两种频率发射载波信号，都有高精度频率标准控制时钟和发射机，都有存储轨道星历的磁心存储器，以及测定卫星工作状态的遥测系统，指令系统，等等。但是NOVA卫星还有许多独特的优点，例如：

（1）信号电平强了两倍，有3dB；

（2）有抗干扰系统，用以抵偿大气阻力影响，因而测定一次轨道可保持8天准确，而OSCAR卫星只能保持16小时；

（3）振荡器稳定度高一个量级，达10^{-12}；

（4）为了发射精确的时间，将一个高频伪随机噪声调制在150和400MHz信号上，用户接收机可以阻止来自其他卫星的信号，消除横向卫星的干扰，等等。

表6-1列出这两种卫星性能的简单比较。

由此可见，NOVA卫星向观测者广播的星历精度较高，而且精度降低率比OSCAR卫星慢得多，因而要求地面控制站向它注入新的轨道根数的次数相对可以减少，也就是两次

OSCAR与NOVA卫星性能比较　　表 6-1

性　　能	OSCAR	NOVA
重力梯度稳定	是	是
消除大气阻力影响能力	无	有
轨道调整及保持能力	无	有
星历储存时间	16小时	8天
可编程序计算机	无	有
频偏保持能力	无	有
工作频偏	−80PPm	−84.43PPm
400MHz 信号功率	2W	5W
天线极化	右旋圆极化	左旋圆极化
150MHz 信号功率	1W	3W
天线极化	左旋圆极化	左旋圆极化
振荡器稳定度 (30秒平均)	5×10^{-11}	5×10^{-12}
遥测方式	模拟，35通道	数字，164通道
姿态控制方式	2轴	3轴
天线对垂线最大偏离	10°～17°	1°～1°

注入所隔时间可以较长。显然，这对提高定位精度大为有利，利用NOVA卫星可以使各次观测的定位结果较快地收敛（参见图6-1），平差后结果的精度较高。

2．卫星星历

子午卫星系统的控制、运转及维护都由美国海军宇航局（NAG）主持，总部设在加州的默古角（Pt.Mugu），在美国本土设有四个已知地面跟踪站，分别位于缅因(Maine)、明尼苏达（Minnesota)、加利福尼亚（California)和夏威夷(Hawaii)四州，如图6-3所示。这些地面站负责连续跟踪接收卫星发射的400MHz及150MHz的信号，每当卫星从地平面升起时接收机就锁在卫星信号上，观测由于卫星运动引起的径向多普勒频移，将多普勒频率作为时间函数记录下来，然后将测得的卫星信息数据送到默古角计算中心，计算中心利用这些数据及由时间校准中心获得的标准时间。来计算每个卫星的轨道，从而作出未来若干小时内每个卫星轨道的预报值。再将这种预报值变成电文信息由注入站每天向OSCAR卫星注入两次(每隔12小时)，向NOVA卫星注入一次，不断更新卫星存储器中原有电文数据，并随时向观测者播发，以表明卫星轨道参数及卫星的轨道位置，这种以时间为引数的卫星电文称为广播星历。

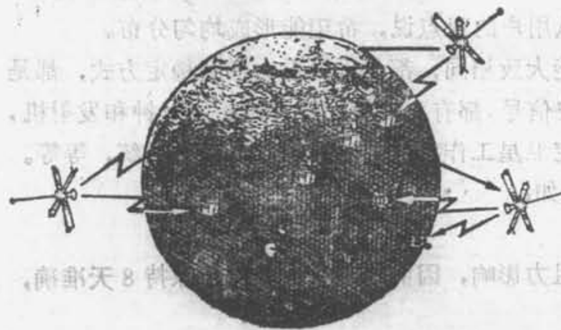


图 6-3

但是由于地球重力场模型与真实重力场的差别，以及作用于卫星的所有摄动力难以精确求出，仅根据上述四个跟踪站观测的卫星轨道局部弧段，推算的卫星在整个轨道上各时刻的位置与它的实际位置会有较大差别，有时可能差到几十米。因此，美国国防部测绘局（DMA）在全球各地布设了许多（约20）个跟踪观测站，以便能对整个轨道弧都有观测值。由这些观测值算出的卫星星历称为精密星历，显然它比广播星历更符合实际情况，因而精度较高。

广播星历是以电文格式每两分钟（世界时）列出一组未解码的星历参数，利用电文中25个字可以解码计算卫星的地心坐标，详见§6.1.2。

精密星历则是每一分钟（世界时）直接列出此时刻的卫星地心坐标及其速度，见表6-2。如果需要计算不是表列整分时间的任何时刻的卫星坐标，可以用差分插值公式计算。

卫星精密星历表 **表 6-2**

时　　间	X	Y	Z	$\dot{X}$	$\dot{Y}$	$\dot{Z}$	卫星号
76 144 16 29	2046.629	− 185.546	6968.432	−7.154313	.433343	2.107989	77
76 144 16 30	1613.564	− 157.330	7081.825	−7.263276	.507053	1.670612	77
76 144 16 31	1175.587	124.721	7168.783	−7.344667	.579716	1.227117	77
76 144 16 32	733.162	− 87.796	7228.991	−7.398200	.650819	.779237	77
76 144 16 33	288.364	− 46.664	7262.238	−7.423712	.719856	.328719	77
76 144 16 34	− 157.123	− 1.464	7268.420	−7.421162	.786330	−.122682	77
76 144 16 35	− 601.616	47.635	7247.534	−7.392629	.849754	−.573214	77
76 144 16 36	−1043.442	190.436	7199.686	−7.332312	.909655	−1.021134	77
76 144 17 58	6300.819	−3217.783	1922.935	−2.073025	.458348	7.118493	77
76 144 17 59	6155.225	−3183.886	2346.270	−2.445268	.671832	6.988303	77
76 144 18 0	6007.583	−3137.138	2761.013	−2.807698	.886577	6.832174	77
76 144 18 1	5828.526	−3077.490	3165.621	−3.158891	1.101670	6.650560	77
76 144 18 2	5628.769	−3004.949	3558.583	−3.497467	1.316178	6.444062	77
76 144 18 3	5409.109	−2919.579	3938.424	−3.922091	1.529154	6.213346	77
76 144 18 4	5170.422	−2821.500	4303.716	−4.131457	1.739641	5.959212	77
76 144 18 5	4913.659	−2710.891	4653.079	−4.424438	1.946678	5.682559	77
76 144 18 6	4639.842	−2587.987	4995.193	−4.699798	2.149303	5.384385	77
76 144 18 7	4350.057	−2453.082	5298.797	−4.956494	2.346562	5.065786	77
76 144 18 8	4045.450	−2306.520	5592.702	−5.193535	2.537509	4.727951	77
76 144 18 9	3727.244	−2148.726	5865.792	−5.410017	2.721219	4.372153	77
76 144 18 10	3396.681	−1980.143	6117.028	−5.605128	2.896785	3.999746	77
76 144 18 11	3055.071	−1801.292	6345.458	−5.778150	3.063329	3.612165	77
76 144 18 12	2703.757	−1612.740	6550.214	−5.928464	3.220006	3.210900	77
76 144 18 13	2344.120	−1415.105	6730.523	−6.055553	3.366004	2.797510	77
76 144 18 14	1977.564	−1209.049	6885.705	−6.159005	3.500556	2.373605	77
76 144 18 15	1605.518	− 995.282	7015.179	−6.238515	3.622937	1.940839	77
76 144 18 16	1229.425	− 774.553	7118.463	−6.293875	3.732475	1.500903	77
76 144 18 17	850.738	− 547.654	7195.178	−6.325002	3.828550	1.055517	77
76 144 18 18	470.910	− 315.408	7245.050	−6.331906	3.910600	.606420	77

要注意的是：

（1）并不是所有子午卫星都有精密星历，DMA 只给出少数 1～2 个卫星的精密星历，例如30190，30120，而后一卫星工作了十三年后目前已经失效，由 30480 取代。

（2）并不是所有用户都能得到精密星历，因为精密星历是事后用全球跟踪观测数据计算的，不是卫星广播的，美国国防部测绘局只对与他有协议的某些固定测站用户提供该站可测时刻卫星的精密星历。

（3）精密星历坐标和广播星历解码算出的坐标，实际上不属于同一坐标系，因为DMA计算轨道所用的重力场模型与NAG所用的稍有不同，故同一点上用两种星历求得的点位坐标要经适当变换后才能比较。

6.1.2 卫星播发的信息

卫星播发的信息是以三相相位调制方法调制于两个相关的载频上，其频率分别为 400 MHz～32kHz 和150MHz～12kHz。信息内容包括：时间信号，轨道参数信息，卫星识别号和信号状态。每两分钟出现一个时间信号，均在世界时偶数分钟时刻播发。轨道信息包括确定卫星平均轨道的星历参数，以及在每两分钟内平均轨道的偏差量。

信息调制数据格式采用一种特殊的半二进制波形的组合来表示二进制数据码，编码采用二—十进制余 3 代码（BCDXS3 码）。

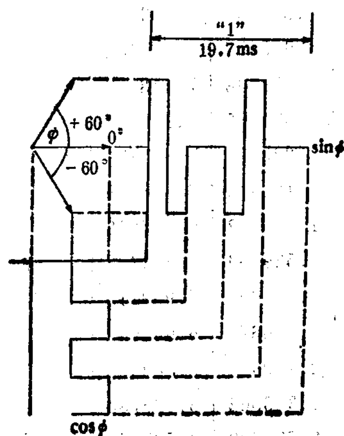


图 6-4

相位调制角为 0° 和 ±60°，参见图 6-4，即二进制的“1”由A、B两个信号组成，A信号开始时，相位超前 60° 持续 2.5ms，然后变为滞后60°，再持续 2.5ms，然后变为无调制，相位为0°，持继 5ms，此为半个比特或称正码。下半个比特为 B 信号，先滞后再超前再 0 相位，为负码。表示二进制“0”的第二个比特则与上述次序相反，即先滞后再超前再无调制再超前再滞后再无调制，比特速率近于每秒 50 比特。

卫星每两分钟发送 6103 比特的信息，由每字长 39 比特的 156 个字再加一个 19 比特长的字组成，所以每个比特的传送时间应为 19.662461ms。每 6 个字排成一横行，故可排26 横行，最后的第 26 行多 19 比特，共 253 比特，而前25 行每行则为 234 比特。每一横行的 6 个字分为两组，前 5 个字是不能解码的字，不能利用，第 6 个字是可解码的字，接收机可解码用于定位测量，参见表 6-3。因此每一横行的最后一个字便构成一纵列，此纵列的字全是有用的。

两分钟内卫星播发的 157 个电文字的编号排列形式如图 6-6 所示，从第 3 号字排起，此字开始瞬刻（也是第 2 号字结束瞬刻）是时标，按协调世界时UTC确定，精度±50μs，表示两分钟的开始，每一横行 6 个字共需时间 4.601016 秒。第 3 号字中没有二进制比特

表 6-3

1	3	4	5	6	7	8
2	9	10	11	12	13	14
3	15	16	17	18	19	20
4	21	22	23	24	25	26
5	27	28	29	30	31	32
6	33	34	35	36	37	38
7	39	40	41	42	43	44
8	45	46	47	48	49	50
9	51	52	53	54	55	56
10	57	58	59	60	61	62
11	63	64	65	66	67	68
12	69	70	71	72	73	74
13	75	76	77	78	79	80
14	81	82	83	84	85	86
15	87	88	89	90	91	92
16	93	94	95	96	97	98
17	99	100	101	102	103	104
18	105	106	107	108	109	110
19	111	112	113	114	115	116
20	117	118	119	120	121	122
21	123	124	125	126	127	128
22	129	130	131	132	133	134
23	135	136	137	138	139	140
24	141	142	143	144	145	146
25	147	148	149	150	151	152
26	153	154	155	156	157	1	2

信息，仅为400MHz相位调制信号(解码后可听到“唧”的声音，故可作为监听解码情况之用)，传送时间和其他39比特字一样，为766.836ms。第1及2号字排在第26横行末尾，字长也是39比特，第1号字前面的第157号字则是19比特长，这第1及2号字起先导及同步作用，第2号和第3号字一起可提供时间标志，第1、2号字的格式是（其中×表示或为1或为0）：

第1号字：

1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1 0 1 × × × × 0 0

第2号字：

$$\underbrace{\times\times\cdots\cdots\times\times}_{14\text{个比特}}\quad\underbrace{0\overbrace{1\,1\,1\cdots\cdots1\,1\,1}^{23\text{个“1”}}0}_{25\text{个比特}}$$

第2号字的后25个比特即是同步信号的计时码，当最后的0结束时即为第3号字开始，表示某一偶数分钟开始。

如前所述，表6-3中对定位有用的字是右边一纵列的各字，即从第8号字起间隔6个号的14、20、…152等字，以及确定时标的第2、3号两字，纵列中第140、146、152三个字，在未注入新的信息的时间内均为余3代码的“0”，在注入期间则为等号“=”。其余22个字分为两部分：

① 前8个字称为可变星历参数，其内容包括锁定卫星信号的时间以及前后若干偶数分的时间，对平均轨道的偏近点角改正ΔE、半长轴的改正Δa和轨道面法向偏差改正η，解码后的数据参见表6-4。

② 后14个字称为固定星历参数，对应于平均轨道，其内容包括轨道根数、卫星识别号、信号载频400MHz的频偏等，解码后的数据见表6-4。

表6-4列出了一组两分钟电文相应于表6-3右边纵列各字解码后的数据及意义。

1．对于表6-4中固定星历参数的解码，说明如下：

① 表左第二纵列的9位数都是十进制数，固定参数的最后一位数总是0，可不考虑，而第一位数有8或9，它只表示后面数字的正负号，若为8则表示正，是9则表示负，只有第134号字永为负值，且第一位数是参数值的组成部分，

② 各数的小数点永远在各字的固定位置上，

③ 第56号字永远为正，且第一位码数是参数值的组成部分，若第一位是0则仍表示0，若是4则表示1，没有其他情况，

④ 第62号字，解码所得仅是这个数的小数部分，其整数总是3，故应在解码后数据上加上整数3，

⑤ 第122号字的5～8位数给出当年积日，2～4位数给出最近的一次注入信息时间，从平子夜起算的世界时整两分钟的个数，例如表6-4中为155个两分钟，故须乘2变为310分钟，等于5h10min世界时。

2．可变星历参数的解码规则如下：

时间：t_k 的两分钟电文 **表 6-4**

8	420672735			t_{k-6}	前 6 分钟
14	430752496	可	解	t_{k-4}	前 4 分钟
20	440822195	变	码	t_{k-2}	前 2 分钟
26	000851869	星	数	t_k	本次电文开始时间
32	010871516	历	据	t_{k+2}	后 2 分钟
38	020851161	参	见	t_{k+4}	后 4 分钟
44	030800836	数	表 6～5	t_{k+6}	后 6 分钟
50	040730531			t_{k+8}	后 8 分钟
56	033984530		339.8453 min	t_p	最新注入信息后第一次过近地点时刻
62	836606970		3.3660697 度/min	n	卫星平均角速度
68	821307730		213.0773 度	ω	t_p 时刻的近升距，或写为 ω
74	800200200		0.002002 度/min	$\dot{\omega}$	近升距变率，或写为 $\lvert\dot{\omega}\rvert$
80	800011520		0.001152	e	轨道偏心率，或写为 ε
86	807463570	固	7463.57 km	a	轨道半长轴，或写为 $\overline{a}$ 或 A
92	835116130	定	351.1613 度	Ω	t_p 时刻升交点赤经，或写为 Ω
98	900002340	星	－0.0000234 度/min	$\dot{\Omega}$	升交点赤经变率
104	800061380		0.0006138	$\cos i$	轨道倾角余弦，或写为 Ci
110	824877870	历	248.7787 度	GAST	t_p 时刻格林尼治视恒星时，或 $\wedge_G$
116	800301300	参	30130	№	卫星识别号
122	815500650	数	第65— 310 分钟	Ti	本次注入数据的时间，当年积日，当日时分
128	809999810		0.999981	$\sin i$	轨道倾角正弦，或写为 Si
134	799320000		－79.932 PPm	FKS	400MHz 的相对频偏
140	000000000				
146	000000000				
152	000000000				

时间：t_{k+2} 的两分钟电文

8	430752496				
14	440822195				
20	000851869				
26	010871516				
32	020351161				

① 表 6-5 左边第二纵列的 8 个可变星历参数，其第一位数有三个内容的含意，即表示时间的第一位数，ΔE和 Δa 的正负号，参见表 6-6。例如第一位数是 4 ，则表示时间的第一位数是"1"，ΔE是"+"，Δa 是"+"。若第一位数是 0 ，则表示时间第一位数是"0"，ΔE 是"+"，Δa 是"+"。

② 可变参数的第二位数直接与上述方法解得的时间第一位数组成一个计算时间的两位数。例如表 6-5 中第一个可变参数的头两位数是42， 4 解码得 1 ，于是时间的两位数是 12，这个 12 是指 12 个两分钟，所以应为 24 分。可变参数的头两位数只给出每半小时内

可变星历参数解码　　　　表 6-5

电文字号	接收到的数据	时　间	解　码　后　数　据		
			ΔE(度)	Δa(km)	η(km)
8	420672735	1224	+0.0067	+2.73	+0.06
14	430752496	1226	+0.0075	+2.49	
20	440822195	1228	+0.0082	+2.19	+0.09
26	000851869	1230	+0.0085	+1.86	
32	010871516	1232	+0.0087	+1.51	+0.11
38	020851161	1234	+0.0085	+1.16	
44	030800836	1236	+0.0080	+0.83	+0.11
50	040730531	1238	+0.0073	+0.53	

表 6-6

可变参数首位	固定参数符号	时间首位数	ΔE符号	Δa符号
0		0	+	+
1		0	+	−
2		0	−	+
3		0	−	−
4		1	+	+
5		1	+	−
6		1	−	+
7		1	−	−
8	+			
9	−			

表 6-7

可变参数末位数	法向改正η首位数
0	−0
1	−4
2	−3
3	−2
4	−1
5	+0
6	+1
7	+2
8	+3
9	+4

的两分钟个数，所以实际时间还要加上此时在当日已过去多少个半小时，并化成以分为单位，加到上面的 24 分上去。例如表 6-5 的第三纵列第一个时间数字是加上了 1200 分钟，故为1224。

③ 可变星历参数的第 3～5 位数，直接表示 ΔE 改正，单位是 10^{-4} 度；第 6～8位数直接表示 Δa 改正，单位是10m。

④ 可变星历参数的最后一位数隐含着轨道面法向偏差改正，这项改正是个两位数，每 4 分钟给出一次，它的第一位数及其正负号用能被 4 整除的分钟时刻对应的可变星历参数末位数按表 6-7 的规则解码求出，而第二位数则直接取用紧接着的下一个

星历参数的末位数，组成的两位数其单位为10m。例如，表6-5中第一个可变参数末位是5，按表6-7可知应为“+0”，第二个可变参数末位是6，组成+06（10m），化成公里即为+0.06km。

表6-4中的可变参数每两分钟改变一次，即下一个两分钟电文中t_{k+8}位置的可变参数换成新值，而将上两分钟电文中此位置的数向上移到t_{k+6}位置，依此逐个上移，最上面的即第8号可变参数消失，参见表6-4下左的例子。固定参数则在新值注入前保持不变。

6.1.3 按广播星历计算卫星地心坐标

由表6-3及表6-4可见，广播星历的固定参数给出了相邻两次注入卫星信息期间卫星的椭圆轨道平均根数a，e，i，$\omega(t_p)$，$|\dot{\omega}|$，$\Omega(t_p)$，$\dot{\Omega}$，t_p，还有n，GAST（t_p时刻的），可变参数又给出了每两分钟（或4分钟）对平均轨道的摄动改正Δa，ΔE，η，因此根据第三章§3.7及§3.6中的有关公式，就可以计算卫星对于引力中心（地心）的坐标，只是在这里，对于子午卫星系统，坐标计算的公式略有一些改变。

设如图6-5所示，将上述有关量表示在图上，图中X坐标系统为天球坐标系，X_T坐标系为固定于地球的坐标系，随地球自转，地球自转角速度用ω_e表示。设在任一时刻t，卫星已过近地点，此时位于$S(t)$，它的地心位置矢量为$\vec{r}_s$。如果令$\vec{r}_{s_O}(t)$表示t时刻卫星在轨面坐标系（参阅§3.7.2）中的坐标矢量，令$\vec{r}_{s_T}(t)$表示此时卫星在地（球）固（定）地心坐标系中的坐标矢量，则有

$$\vec{r}_{s_O}(t)=\begin{bmatrix}x_0(t)\\y_0(t)\\z_0(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(t)(\cos E(t)-e)\\a(t)\sin E(t)\\\eta(t)\end{bmatrix} \tag{6-1}$$

式中

$$a(t)=a+\Delta a(t) \tag{6-2}$$

$$E(t)=M(t)+e\sin M(t)+\Delta E(t) \tag{6-3}$$

$$M(t)=n(t-t_p) \tag{6-4}$$

$M(t)$为t时刻卫星的平近点角，$E(t)$为偏近点角，其余各量均见表6-3及表6-4。

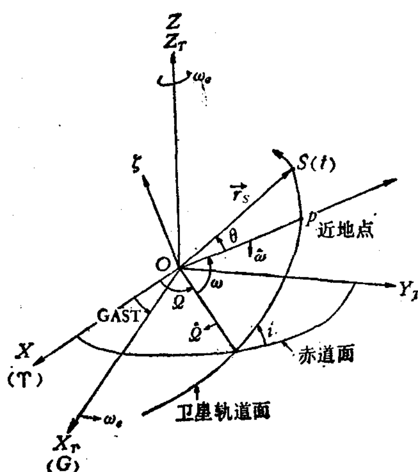


图 6-5

$$\vec{r}_{s_T}(t)=\begin{bmatrix}x_T(t)\\y_T(t)\\z_T(t)\end{bmatrix}=R(t)\cdot\vec{r}_{s_O}(t) \tag{6-5}$$

式中

$$R(t)=R_3(\alpha_3(t))R_1(\alpha_2(t))R_3(\alpha_1(t)) \tag{6-6}$$

$$\alpha_1(t)=-\omega(t)=-[\omega(t_p)+\dot{\omega}(t-t_p)] \tag{6-7}$$

$$\alpha_2(t)=-i=-\mathrm{arctg}(\sin i/\cos i) \qquad (6\text{-}8)$$

$$\alpha_3(t)=-[\Omega(t)-\mathrm{GAST}(t)]=-[\Omega(t)-\mathrm{GAST}(t_r)+(\dot{\Omega}-\omega_e)(t-t_r)] \qquad (6\text{-}9)$$

上式中

$$\omega_e=4.3752695\times10^{-3}\mathrm{rad/min}$$

$\dot{\omega}$及$\dot{\Omega}$的数值参见表6-4，计算公式及正负号的意义见§3.9.2.1的分析。式（6-1）～（6-3）中用到的$\eta(t)$，$\Delta a(t)$，$\Delta E(t)$，要由表6-5所列那样的数据用曲线内插方法求得，特别是对于求$\eta(t)$，因为表中只是每4分钟给出一个数，故要求表列参数值更多一些，例如若求$\Delta a(t)$，$\Delta E(t)$需用五个参数值，则求$\eta(t)$应有九个参数值。

广播星历给出的卫星坐标自1974年1月27日以后都是属于国际协用平极原点CIO和国际时间局BIH所定经度零点的坐标系中的坐标。

按广播星历算出的卫星在轨道上位置与其实际位置的差别，可以用ΔE，Δa，η所含误差来估计。由于Δa，η以10m为单位，ΔE以10^{-4}度为单位，相当于以13m为单位，而可变参数的广播值是凑整而不是截断的，所以每个参数值的凑整误差都是以相同概率在-0.5到$+0.5$个单位之间，这个等概率分布的标准差应为$0.5/\sqrt{3}$单位，因而对于Δa和η是3m，ΔE则是4m。

但是这并不能完全代表广播星历的精度，因为计算上述摄动改正数要用到地球引力场模型，以及其他摄动因素如大气阻力等的模型表示式。选用的模型精度如何，卫星的性能如何，也将影响广播星历的精度，而这又是一个理论公式与实测验证不断改进提高的过程。

§6.2 测量多普勒频移求距离差

6.2.1 多普勒频移计数

1. 多普勒效应

在第二章§2.5中，已经简要讲过，由于发射电磁波信号的信号源（卫星）和接收信号的测站相对运动，会因多普勒效应而产生频移，若用f_s表示发射时的频率，λ_s表示发射时的波长，f_r表示接收到的频率，λ_r表示接收到的波长，c为电磁波在真空中的速度，v为信号源相对于地球的速度，θ为信号源速度方向与到测站方向之间的夹角，则按§2.5所述原因，对于信号源渐近于测站的情况，有

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_s}=\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right),\ \lambda_r<\lambda_s \qquad (6\text{-}10)$$

$$\frac{f_r}{f_s}=\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^{-1},\ f_r>f_s \qquad (6\text{-}11)$$

当$\theta=\pm\frac{\pi}{2}$时，则$\lambda_r=\lambda_s$，$f_r=f_s$，以上是经典物理学的结论，如果从相对论观点考虑，则上两式应为（参见参考文献［38］）

$$\frac{\lambda_r}{\lambda_s}=r\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \qquad (6\text{-}12)$$

$$\frac{f_r}{f_S}=r^{-1}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^{-1} \tag{6-13}$$

式中

$$r=\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{6-14}$$

卫星运动速度的径向与横向分量为

$$\left.\begin{aligned}v_r&=v\cos\theta\\ v_s&=v\sin\theta\end{aligned}\right\} \tag{6-15}$$

而

$$v^2=v_r^2+v_s^2$$

故将（6-13）式展为级数，取至二阶项，即得

$$\begin{aligned}f_r&=f_S\left(1+\frac{v_r}{c}+\frac{v_r^2}{c^2}\right)\left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\\ &=f_S\left[1+\frac{v_r}{c}+\left(\frac{v_r}{c}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)\right]\\ &=f_S\left[1+\frac{v_r}{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{v_r}{c}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{v_s}{c}\right)^2\right]\end{aligned} \tag{6-16}$$

上式中第二、三两项称为径向多普勒效应，最后一项称为横向多普勒效应。对于高度为1000km左右的子午卫星，径向速度变化最大约为7km，取最大值7km，取$c=3\times10^5$km，则因子$\frac{1}{2}\left(\frac{v_r}{c}\right)^2$约为$3\times10^{-10}$，小于表 6-1 及表 6-4 中给出的 $f_S=400$MHz 的相对频偏误差，两者难以区分。故一般在求解时作为频偏的误差未知数来考虑，若再舍去横向效应，则（6-16）式便成为

$$f_r=f_S\left(1\pm\frac{v_r}{c}\right) \tag{6-17}$$

按前面θ的定义，当$0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$即卫星渐近测站时，取“+”号，$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$时，取“−”号，而$v_r$不再考虑负值，恒为正。

2．多普勒频移计数

卫星发射机以固定频率 f_S 发射连续信号，而地面接收机收到的信号频率f_r会因两者之间的距离不断变化而变化，测量f_r和f_S的频率之差是利用接收机中的电子计数器量出相应的振荡周数，参阅图 6-6。由于f_r和f_S之差有正有负，为了使测得的差数恒为正值，也因为用户不能精确测出卫星发射频率f_s，所以将频率差分成两部分，即在某一恒定的时间间隔内有

$$f_r-f_S=(f_g-f_S)-(f_g-f_r) \tag{6-18}$$

其中，f_g 是由接收机中稳定的基准振荡器产生的准确等于 400MHz 的基准频率，振荡器

已设计得其稳定度足以保证在卫星飞经测站的起讫时间内频率不变，f_S 为卫星发射频率的设计值 400MHz－32kHz＝399.968MHz，因此（f_s-f_S）即为标称常数 32kHz，要测量的只是相应于（f_s-f_r）的多普勒频移周数，而（f_s-f_r）则是由接收机产生的拍频。

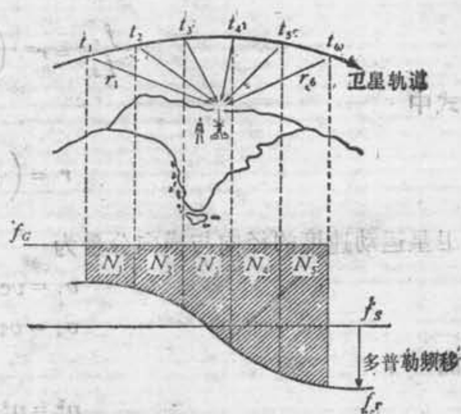


图 6-6

设卫星在 t_1 到 t_2 时间内发射连续信号，而接收机则是 $t_1+\Delta t_1$ 到 $t_2+\Delta t_2$ 时间收到信号，其中

$$\Delta t_1=\frac{r_1}{c},\qquad \Delta t_2=\frac{r_2}{c} \tag{6-19}$$

c 为电磁波在真空中传播的平均速度，则

$$N=\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2}(f_s-f_r)dt \tag{6-20}$$

称为此时间内的多普勒频移计数，由上式可得

$$N=f_s(t_2-t_1)+f_s(\Delta t_2-\Delta t_1)-\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2}f_r dt \tag{6-21}$$

由于接收机在 $t_1+\Delta t_1$ 到 $t_2+\Delta t_2$ 时间内收到的周数就是卫星在 t_1 到 t_2 时间内发出的周数，只是时间延迟了一点，所以有

$$\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2}f_r dt=\int_{t_1}^{t_2}f_S dt=f_S(t_2-t_1) \tag{6-22}$$

于是（6-21）变为

$$\begin{aligned}N&=f_s(t_2-t_1)+f_s(\Delta t_2-\Delta t_1)-f_S(t_2-t_1)\\&=(f_s-f_S)(t_2-t_1)+f_s(\Delta t_2-\Delta t_1)\end{aligned} \tag{6-23}$$

顾及（6-19），又可写为

$$N=(f_s-f_S)(t_2-t_1)+\frac{f_s}{c}(r_2-r_1) \tag{6-24}$$

这就是积分计算多普勒频移计数的基本公式。式中 N 是由接收机计数器算出的观测量，（f_s-f_S）是常数值，（t_2-t_1）可由卫星发出的时标得知，所以仅距离差 r_2-r_1 是未知的，可按上式求出，即

$$\Delta r=r_2-r_1=\frac{c}{f_s}(N-(f_s-f_S)(t_2-t_1)) \tag{6-24a}$$

3．积分间隔

利用（6-18）式，还可将（6-20）式写成：

$$N=\int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2}[(f_s-f_S)-(f_r-f_S)]dt$$

$$= (f_g - f_s)[(t_2 + \Delta t_2) - (t_1 + \Delta t_1)] - \int_{t_1+\Delta t_1}^{t_2+\Delta t_2} (f_r - f_s) dt \tag{6-25}$$

顾及（6-22）式，并令

$$T_2 = t_2 + \Delta t_2, \qquad T_1 = t_1 + \Delta t_1 \tag{6-26}$$

于是得

$$N = (f_g - f_s)(T_2 - T_1) - \{f_s(t_2 - t_1) - f_s[(t_2 + \Delta t_2) - (t_1 + \Delta t_1)]\}$$

$$= (f_g - f_s)(T_2 - T_1) + \frac{f_s}{c}(r_2 - r_1) \tag{6-27}$$

比较式（6-27）和（6-24）可知，同一多普勒计数N可以用不同的积分间隔求得。如果用卫星时钟所确定的 $t_2 - t_1$ 作为积分间隔，如（6-24）式，则求得的距离差（$r_2 - r_1$）是以地面接收机基准频率 f_g 的波长 c/f_g 为单位的，如用地面接收机时钟所确定的 $T_2 - T_1$ 作为积分间隔，如（6-27）式，则（$r_2 - r_1$）应是以 f_s 的波长为单位。

如前所述，子午卫星每隔世界时两分钟由卫星钟发出时标，这就可以提供一种积分间隔。此外，在两分钟一帧的电文中又是每隔 4.601016 s 发出一横行，包含一个星历参数（参见表6-4），重复这个时间间隔25次，完成 25 行，最后一行的时间间隔是4.974603s，共为 120s，相应于 6103 个调制byte。因此，标称值 4.6s 可以作为最短的积分间隔，也可取它的倍数，直至 120s，随不同的接收机而有不同，比较普遍的是采用 4.6s，也有采用 23s、28s 等等间隔的。如果是取 4.6s 的 6 倍或 7 倍，作为积分间隔求多普勒计数，则都概略地说成是 30s 多普勒计数。

关于接收机如何读出 $t_2 - t_1$ 或$T_2 - T_1$以及 Δt_2，Δt_1，并给出相应多普勒计数的整数周和小数的，详见 § 6.4。

6.2.2 电离层折射改正

前节导出的多普勒计数公式，是假定在理想情况下，即电磁波在真空中传播的情况求得的，式中用的电磁波传播速度 c 值也认为是常值。但是实际上电磁波是穿过大气层到达地面接收机的，受到大气层折射，它的传播速度不是常值 c，它的传播路径也会被弯曲。而使长度改变，所以要加以改正。

影响电磁波传播的大气层部分*，主要在离地面的高度约 1000km 以下，这部分又可大致分为40km以上的电离层和 40km以下的对流层，这两部分的折射影响不同。本节先讨论电离层折射影响。

1. 电离层主要是由于太阳辐射使大气分子电离而形成的，在电离层中有大量的离子和电子，影响着电磁波的传输，电离层相折射率 n_p 可以表示为（见参考文献 [18]）。

$$n_p = 1 - (K_1 N_e) f^{-2} \pm (K_2 N_e B \cos\theta) f^{-3}$$

* 关于整个地球大气层情况的分析参见 § 10.3.3.

$$-[K_3N_e^2+K_4N_eB^2(1-\frac{1}{2}\sin^2\theta)]f^{-4} \quad (6-28)$$

其中第一项又可写为

$$-\left(\frac{N_e\cdot e^2}{8\pi^2 m\varepsilon_0}\right)f^{-2} \quad (6-29)$$

上两式中，

N_e——每立方米中的电子数，即电子密度；

e——单个电子的电荷；

m——电子的质量；

ε_0——介电常数；

B——地球磁场的磁通量；

θ——电磁波法线与磁通方向的夹角；

f——电磁波的频率。

如果取 $f=400\ \text{MHz}$

$e=1.6022+10^{-19}$ (c)

$m=9.1096\times10^{-31}$ (kg)

$\varepsilon_0=8.8542\times10^{-12}$ (F/m)

则仅取（6-29）式这一项，可得

$$(n_p-1)=-40.3N_ef^{-2} \quad (6-30)$$

若再取

$$N_e=10^{11} \quad (\text{m}^{-3})$$

则

$$(n_p-1)\approx-30 \quad \text{ppm}$$

电磁波在电离层中传播的相速度 v_p 与在真空中传播的速度 c 及相折射率 n_p 的关系为

$$v_p=c/n_p=c/(1-40.3N_ef^{-2}) \quad (6-31)$$

由于（n_p-1）是负值，可见传播路径将凸向电子密度高的区域。由（6-31）式又可知，相速度 v_p 略大于真空速度 c。

在电离层中，折射率随电磁波频率的不同而变，因而群速度 v_G 和相速度 v_p 不同，群折射率 n_G 与相折射率 n_p 不同，有以下关系：

$$v_G=v_p(1-80.6N_ef^{-2}) \quad (6-32)$$

$$v_G=c(1-40.3N_ef^{-2})=c/n_G$$

$$n_G=1+40.3N_ef^{-2} \quad (6-33)$$

所以群速度小于真空速度，群折射率大于 1。

对于测量卫星到测站的距离*，计算电离层折射改正时，若使用调制波，应采用群折

* 这里距离用 s 表示，而不用 r，是为不使距离的折射改正 Δs 与前面的距离差混淆。

射率，若用多普勒方法，则应采用相折射率，距离及折射改正按下式计算：

$$\left.\begin{aligned} s &= c\tau + \Delta s \\ \Delta s &= \int_0^s (n_p - 1) ds \end{aligned}\right\} \qquad (6\text{-}34)$$

折射率取决于电子密度，而电离层中的电子密度分布不匀且时时在变，难以预测，特别是在太阳活动强烈时，电子密度与正常值差别很大，即使在太阳活动平静期间，白天和夜晚也有相当大的差别，图 6-7 大致表示了太阳平静期白天和夜晚电子密度的差别，以及随高度的增加电子密度变化的情况。

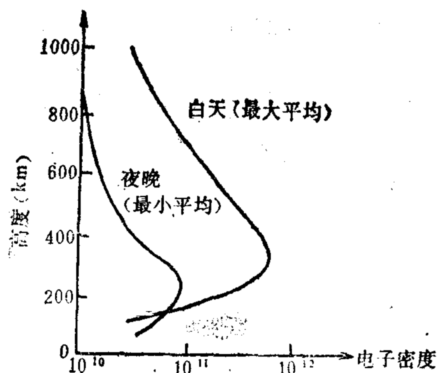


图 6-7

从这个图我们大致可以判断：高度 200km 到 400km 电离层电子密度最大，200km 以下和 400km 以上逐渐减小，接近 1000km 高度处夜晚几乎为零，因此，如果从 1000km 以上向地面发射电磁波（天顶距大于零），传播路径的弯曲方向将会是，在最大电子密度层（400km 高度）以上的电离层中凸向地面，400km 高度以下则凹向地面，1000km 以上就几乎不弯曲。

2．要对（6-34）式求积分，必须知道不同高度 h 处电离层的折射率n_p，而且ds与dh的关系取决于 ds 方向的天顶距 ζ，如果 $\zeta<45°$，则可表示为

$$ds = dh \sec \zeta \qquad (6\text{-}35)$$

若 ζ 较大，则上式不够准确，ζ 要加改正（参见参考文献 [18]）。

对于我们讨论的多普勒测量方法，利用前面给出的 N_e 值，以及 $f=400\text{MHz}$，按（6-30），（6-34）及（6-35）式，对于 100km 长的传播路径，可求得

$$s = (c\tau + 7.0 \sec \zeta) \quad (\text{m}) \qquad (6\text{-}36)$$

由于电子密度 N_e 是变化的，它将直接影响算出的结果，但又不能随时测出它，只能利用如图（6-7）那样大致估算在正常情况下白天和夜晚的平均差别。一个较好的解决办法是，同时用高、低两个频率进行测量（例如用400MHz和150MHz），以削弱或消除其影响，计算方法如下：

根据（6-28）式，我们可以将（6-34）式表示为

$$\begin{aligned} \Delta s &= \int (n_p - 1) ds \\ &= b_1 f^{-2} + b_2 f^{-3} + \cdots\cdots \end{aligned} \qquad (6\text{-}37)$$

再利用（6-24）或（6-27）式，求多普勒计数，设未受折射的真空多普勒计数用 N_{vac} 表示，测出的受折射影响的计数用 N_{ion} 表示，计数的电离层折射改正数用 ΔN_{ion} 表示，则由（6-24）式可得

$$\begin{aligned} \Delta N_{ion} &= N_{vac} - N_{ion} \\ &= \frac{f_g}{c}(\Delta s_2 - \Delta s_1) \end{aligned}$$

式中 Δs_1 及 Δs_2 分别表示 r_1 及 r_2 的折射改正数。由于 r_1 及 r_2 相对于测站的天顶距不同，经过不同的电离层部位，(6-37) 式中系数 b_i 不同，故可将上式表示为

$$\Delta N_{ion} = a_1 f_g^{-1} + a_2 f_g^{-2} + \cdots\cdots \tag{6-38}$$

(6-37) 及 (6-38) 式中的系数 a_i，b_i 均与频率 f 无关，只和相应的电离层状态有关。如果同时使用 400 MHz 及 150 MHz 两个频率测量，并在 (6-38) 式中只取一阶改正项，由于

$$400 = \frac{8}{3} \cdot 150$$

故有

$$N_{vac}^{400} - N_{ion}^{400} = \frac{a_1}{f_g^{400}} \tag{6-39}$$

$$N_{vac}^{150} - N_{ion}^{150} = \frac{a_1}{f_g^{150}}$$

或

$$\frac{8}{3} \cdot N_{vac}^{400} - N_{ion}^{150} = \frac{a_1}{f_g^{150}} = \frac{8}{3} \cdot \frac{a_1}{f_g^{400}} \tag{6-40}$$

用 $\frac{8}{3}$ 乘 (6-39) 式，再减去 (6-40) 式，得

$$N_{vac}^{400} = \frac{24}{55}\left[\left(\frac{8}{3}\right)N_{ion}^{400} - N_{ion}^{150}\right] \tag{6-41}$$

这样，就消去了一阶电离层折射影响，而且如果需要，还可计算出它的数值。

由 (6-41) 式及 (6-39) 式可见，无论是消去或算出一阶电离层折折改正，在接收机内部都不难做到，过去有些接收机如 JMR-1A，就已这样做了，参见 § 6.4。

由于以上的计算仅顾及一阶改正，其结果必定还存在残余影响，根据有的文献估算，一般将小于总改正量的 1 %，在夜晚甚至可以略而不计，但在白天下午则较大，可能达到下节所述的对流层折射改正残余量的三倍。

在一般情况下，使用双频观测，当测站到卫星的距离最近且高度角较大时，倾斜距离中上述误差可能小于 0.5m，高度较小时，可达 1～2m。如果一个测站上观测了多次卫星经过，平均误差估计不会大于 0.1m。

此外，对于极轨道的子午卫星，电离层折射对测站纬度影响很小；而当卫星从测站的东方和西方飞过时，经度所受影响的符号相反。

6.2.3 对流层折射改正

1. 对流层折射引起的多普勒频移计数的改正比上节讨论的电离层折射改正更为复杂，因为对流层更靠近地面，不仅因重力作用而使大气密度更大，还因地面气候变化而随时改变大气状态。

近地面的大气成分也比较复杂，除了干燥的气体分子外，还有水蒸汽分子。干燥气体

中（按所占体积计）主要是氮（78.03%）和氧（20.99%），其次是氩（0.93%）、二氧化碳气（0.03%）、氢（0.01%）。除此之外的一些气体如臭氧（O_3）虽对地球上生物有重要作用，但含量相对地极其微小，这里不必细加分析。此外，大气中还含有某些不定量的混合物，如硫化物、氨、二氧化氮、盐、煤烟、微尘等。

大气的状态决定于三个量：气温T、气压P和体积V，三者之间的关系可用下式表示：

$$PV = \nu R \cdot T \tag{6-42}$$

其中

$$R = \frac{1}{273.15} P_0 \cdot \omega \tag{6-43}$$

称为克拉普罗特（M.Klaproth）常数。上两式中P_0是气温为273.15K时的标准气压，ω是在标准大气状态下一克分子任何气体的体积，$\omega = 22412\text{cm}^3$，$\nu$是气体的克分子数。

若取$P_0 = 1$个标准大气压，则$R = 8.2050 \times 10^{-3}$；若取1个标准大气压为每平方厘米上所受的力。即$P_0 = 1013.25 \times 10^3$达因，则$R = 8.3137 \times 10^7$。

若将（6-42）式中的体积V换成质量M除以密度ρ，则可变为

$$\frac{P}{T} = \left(\frac{\nu \cdot R}{M}\right)\rho = C_d \cdot \rho \tag{6-44}$$

式中C_d称为干燥大气常数。若取$\nu = 1$，则M为气体克分子量，例如氧的克分子量为32，氮为28，水蒸汽为18，等等。取干燥大气的平均克分子量，约为28.964，则$C_d = 2.8704 \times 10^6$(厘米^2·秒$^{-2}$·$°K^{-1}$)，相应地对于水蒸汽则可求得$C_w = 4.6187 \times 10^6 \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1} \cdot °K^{-1}$)。

2．非标准大气状态下的大气折射率与标准大气状态折射率有如下关系：

$$(n-1)\frac{T}{P} = (n_0 - 1)\frac{T_0}{P_0}$$

所以

$$(n-1) = (n_0 - 1)\frac{T_0}{P_0} \cdot \frac{P}{T} \tag{6-45}$$

用（6-44）式关系代入，并取$T_0 = 273.15$，$P_0 = 1013.25$，则得

$$(n-1) = 0.2696(n_0 - 1)C_d \cdot \rho = 0.2696(n_0 - 1)\frac{P}{T} \tag{6-46}$$

标准大气状态下的折射率n_0对于不同的波长λ有不同的值，由下式计算：

$$(n_0 - 1)10^6 = 287.604 + 1.6288\lambda^{-2} + 0.0136\lambda^{-4} \tag{6-47}$$

例如对于红光、钠光、紫光有以下相应值：

红光	$\lambda = 0.72$	$n_0 = 1.0002908$
钠光	$\lambda = 0.589$	$n_0 = 1.0002924$
紫光	$\lambda = 0.40$	$n_0 = 1.0002983$

由于光波在大气中的传播速度v与折射率n的关系有$v = \frac{c}{n}$，因此n越大，v则越

小。可见，不同波长（或频率）的波传播速度随折射率的不同而改变。

在非标准大气状态下，折射率又会因气压P及气温T的不同而变，干燥大气与水蒸汽的压力也不一样，若用e表示水汽分压力，用（$P-e$）表示干燥大气分压力，而P表示两者之和，即总压力，于是在非标准状态的大气条件下，折射率n可按下式计算：

$$(n-1)=(n_0-1)\frac{1}{\alpha T}\cdot\frac{P}{760}-\frac{1}{\alpha T}\cdot\frac{5.5}{10^8}e \tag{6-48}$$

式中

$$\alpha=\frac{1}{273.15}=0.003661 \tag{6-49}$$

P及e以毫米汞柱高为单位，T以绝对温度表示，如果P和e以毫巴为单位，则上式变为

$$(n-1)=(n_0-1)\frac{1}{\alpha T}\cdot\frac{P}{1013.25}-\frac{1}{\alpha T}\cdot\frac{4.2}{10^8}e=\frac{(n_0-1)}{T}\cdot\frac{1}{\alpha\cdot 1013.25}$$

$$\times\left(P-\frac{0.042\times 1013.25}{n_0-1}e\right)=0.2696(n_0-1)\left(\frac{1}{T}\right)(P-0.14e) \tag{6-50}$$

如果按（6-47）式，取$\lambda=1.9986(150\mathrm{MH_z})$，求出$n_0$代入上式，并且不计水汽分压力$e$，则得

$$(n-1)10^6=77.6\frac{P}{T} \tag{6-51}$$

由于干燥大气的压力P及温度T可以直接测出，而水汽压力e难以直接测定，通常是测量出湿球的温度，再与水的沸点温度相比，按饱和汽压经验公式来求e的近似值，好在折射率中干气部分至少占总量的90%，湿气部分略有近似影响不大，为了便于计算，曾有过好几种由地面实验得出的近似公式，例如：

$$(n-1)10^6=77.6\frac{P}{T}+(3.73\times 10^5)\frac{e}{T^2}=77.6\frac{1}{T}\left(P+4810\frac{e}{T}\right) \tag{6-52}$$

不同的公式常数部分数字略有差异，但无实质性影响。如果令$(n-1)10^6=N$（这里N不是多普勒计数），则由（6-52）式对于干气部分和湿气部分可相应写为N_d和N_w，于是上式可简写为

$$N=N_d+N_w \tag{6-52a}$$

3．在对流层中，气温T随海拔高度h的增加而减小，气压P也随h的增加而减小，但温度梯度可以认为是常数，而压力梯度则正比于密度ρ，即

$$\frac{dT}{dh}=-\beta \tag{6-53}$$

$$\frac{dP}{dh}=-\rho\cdot g \tag{6-54}$$

式中g是重力值。

将（6-53）式积分，可得

$$T=-\beta h+T_0 \tag{6-55}$$

式中 T_0 为积分常数，也就是当 $h=0$ 时的 T。

将式（6-44）的关系代入（6-54），则得

$$\frac{dP}{dh}=-P\frac{g}{C_d}\cdot\frac{1}{T}$$

由于 $dh=-dT/\beta$，故上式可写为

$$\frac{dP}{P}=-\frac{g}{C_d}\cdot\frac{dh}{T}=\left(\frac{g}{C_d\cdot\beta}\right)\frac{dT}{T} \tag{6-56}$$

两边积分，可得

$$(\ln P)+C_2=\left[\frac{g}{C_d\cdot\beta}(\ln T)+C_1\right]$$

式中积分常数是当 $h=0$ 时的值，即

$$C_1=\ln P_0,\qquad C_2=\ln T_0$$

所以得

$$\ln\left(\frac{P}{P_0}\right)=\left(\frac{g}{C_d\cdot\beta}\right)\ln\left(\frac{T}{T_0}\right)$$

或

$$\frac{P}{P_0}=\left(\frac{T_0-\beta h}{T_0}\right)^{\left(\frac{g}{C_d\cdot\beta}\right)} \tag{6-57}$$

将（6-55）及（6-57）代入（6-52）式，则对于干燥大气可写出

$$N_d=77.6\frac{P}{T}=77.6\frac{P_0}{T_0}\left[\frac{T_0-\beta h}{T_0}\right]^{\left(\frac{g}{C_d\cdot\beta}-1\right)} \tag{6-58}$$

令

$$\left.\begin{aligned}N_{d_0}&=77.6\frac{P_0}{T_0}\\ \mu&=\left(\frac{g}{C_d\cdot\beta}-1\right)\end{aligned}\right\} \tag{6-59}$$

又由（6-55）式可知，当 $T=0$ 时，

$$h=h_d=\frac{T_0}{\beta} \tag{6-60}$$

于是（6-58）变为

$$N_d=N_{d_0}\left[\frac{h_d-h}{h_d}\right]^{\mu} \tag{6-61}$$

若取以下经验测定数据：

$g_m=9.7877(\mathrm{m\cdot s^2})$（大气中平均重力值）

$$C_d = 2.8704 \times 10^2 (\mathrm{m^2 \cdot s^{-2} \cdot {}^\circ k^{-1}})$$

$$\beta = 0.0068 ({}^\circ \mathrm{k \cdot m^{-1}})$$

则

$$\mu = 4$$

于是（6-61）式成为

$$N_d = N_{d_0} \left[\frac{h_d - h}{h_d} \right]^4 \tag{6-62}$$

4. Hopfield 计算公式

（1）霍普菲尔德从观测实验发现，当 $\mu = 4$，且以公里为单位的

$$h_d = (40.110 \pm 0.040) + (0.14881 \pm 0.0018) \times (T_s - 273.15) \tag{6-63}$$

时，以上按高度 h 积分求出的 N_d 最接近于观测值，上式中 T_s 表示地面温度，以 °k 表示。因此，对于地面高度 h_s，相应于（6-62）式可得出

$$N_d = N_{d_s} \left[\frac{h_d - h}{h_d - h_s} \right]^4 \tag{6-64}$$

式中 h_0 表示不在海平面上的测站的正高，而 N_{d_s} 就相应表示测站地面的数值

对于水气压力，霍普菲尔德给出了一个类似的计算公式为

$$N_w = N_{w_s} \left[\frac{h_w - h}{h_w - h_s} \right]^4 \tag{6-65}$$

但式中的 h_w 在算得的 N_w 最接近于观测值的情况下应在 8～13km 之间，平均取值可为

$$h_w = 11.000\mathrm{km} \tag{6-66}$$

（2）由于折射率对电磁波传播路径长度的影响为

$$\Delta s = \int (n-1) ds \tag{6-67}$$

也可写为

$$\Delta s = \int_{r_0}^{r_t} (N \cdot 10^{-6}) \frac{ds}{dr} dr$$

式中积分限 r_0 表示测站的地心半径，r_t 表示对流层中当 N 的影响已小到可以不计的那一层（t 层）的地心半径。

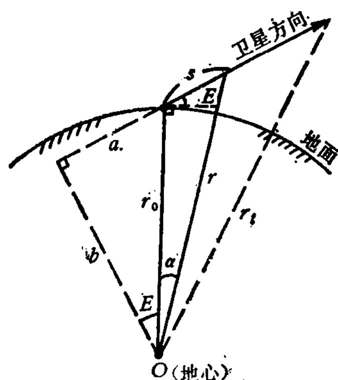


图 6-8

仍先讨论干燥大气影响，故可将（6-64）式代入上式，得

$$\Delta s = \frac{N_{d_0} \times 10^{-6}}{(h_d - h_s)^4} \int_{r_0}^{r_t} (h_d - h)^4 \cdot \frac{ds}{dr} \cdot dr \tag{6-68}$$

若令

$$\left. \begin{aligned} h_{td} &= r_t - r_0 = h_d - h_s \\ z &= r - r_t = h_d - h \end{aligned} \right\} \tag{6-69}$$

又由图 6-8 可见

$$r^2 = (r_0 \cos E)^2 + (r_0 \sin E + s)^2 = b^2 + (a+s)^2$$

即

$$s=(r^2-b^2)^{\frac{1}{2}}-a$$

故

$$\frac{ds}{dr}=\frac{r}{(r^2-b^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{6-70}$$

于是（6-68）式可写为

$$\Delta s=\frac{N_{d_s}\cdot 10^{-6}}{(h_{td})^4}\times\int_{z=-h_{td}}^{z=0}\frac{(r_t+Z)}{[(r_t+Z)^2-b^2]^{\frac{1}{2}}}Z^4dZ \tag{6-71}$$

若计算水气影响，仍用上式，将下标d换成w即可。

（3）当（6-71）式中的$b=0$时，即此时卫星高度角$E=90°$，则该式变得极为简单，即

$$\Delta s=\frac{1}{5}h_{td}\cdot N_{d_s}\cdot 10^{-6} \tag{6-72}$$

或按（6-52）和（6-62）式分别就干气及水汽部分写出

$$\left.\begin{aligned}K_d&=77.6\frac{P_0}{T_0}\cdot\frac{1}{5}(h_d-h_s)\cdot 10^{-6}\\K_w&=77.6(4810)\frac{e}{T_0^2}\cdot\frac{1}{5}(h_w-h_s)\cdot 10^{-6}\end{aligned}\right\} \tag{6-73}$$

计算时，式中h_d用（6-63）式计算，h_w用（6-66）式计算，若以米为单位则上式求出的K_d，K_w单位为米；上式中的T_0，P_0，e，h_s是地面测出的气温、气压、水汽压、正高的数值。

利用（6-73）式可以估算对流层改正的数量大小。例如：取$P_0=1013\text{mb}$，$T_0=273.15$，$h_s=0$，$e=18\text{mbar}$，而（h_d-0）为海平面以上高度，可按（6-60）式表示为$\frac{T_0}{\beta}$，而$\beta=0.0068$，于是可算出在上述条件下的干气改正数K_d为

$$K_d=2.312\text{m}$$

若$T_0=273.15°\text{K}$，则可算出相应的h_d-0为

$$h_d-0=40169\text{m}$$

与（6-63）式很相近。

对于水汽改正数K_w，用上述有关数据及$h_w=11000$代入（6-73）式，算得

$$K_w=0.2\text{m}$$

（4）若$b\neq 0$，还可根据（6-73）式导出（6-71）式的简化计算式。

由于当$E\neq 90°$时，相应于（6-67）式可写为

$$\Delta s=\int(n-1)\frac{ds}{dh}\cdot dh \tag{6-74}$$

由图 6-8 可知，

$$a+s=r\sin(E+\alpha)=(r^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$$

再由（6-70）式可知

$$\frac{ds}{dr}=\frac{r}{(r^2-b^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sin(E+\alpha)}=\frac{ds}{dh} \tag{6-75}$$

如果在图 6-8 中，将 r 表示为 r_0+h，则有以下关系式：

$$\mathrm{tg}E=\frac{(r_0+h)\cos\alpha-r_0}{(r_0+h)\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha-r_0/(r_0+h)}{\sin\alpha} \tag{6-76}$$

由于对流层对折射有影响的高度 $h\leqslant 40\mathrm{km}$，故 $\alpha\leqslant 6.4°$，因此在 E 相当大的情况下，可使 $\sin(E+\alpha)\approx\sin E$，这样，由（6-75）和（6-74）式并顾及（6-73）式便可写出

$$\Delta s=\frac{1}{\sin E}\int(n-1)dh=\frac{K}{\sin E} \tag{6-77}$$

若分别计算干气及水汽影响，则对应于（6-73），将 K 和 Δs 分别加下标 d 或 w 即可。

用简化了的（6-77）式计算的结果与（6-71）式相比，当 $E>10°$ 时，相差不超过 0.5m，为了使两式符合得更好些，霍氏又将（6-77）式改进为

$$\Delta s=K/\sin(E^2+\theta^2)^{\frac{1}{2}} \tag{6-78}$$

式中的 θ 对于计算干气及水汽影响分别取值为

$$\theta_d=2.3°,\quad \theta_w=1.5°$$

将（6-78）式与（6-71）式的计算结果相比。当 $E>10°$ 时，相差小于 0.05m，$E>3°$ 时，也达到相差小于 0.2m。

5．多普勒计数的对流层折射改正

按上述霍氏计算公式（6-78）分别求出距离的干气及水汽折射影响改正 Δs_d 及 Δs_w，则总改正为

$$\Delta s=\Delta s_d+\Delta s_w=\frac{K_d}{\sin(E^2+\theta_d^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{K_w}{\sin(E^2+\theta_w^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{6-79}$$

式中的 K_d 及 K_w 按（6-73）式计算。

对于时刻 t_i 到 t_j 之间的积分多普勒计数 N_{ij}，对流层改正 ΔN_{ij} 对应于两个高度角 E_i 及 E_j，故为

$$\Delta N_{ij}^{tro}=\frac{f_s}{c}[(\Delta s_d+\Delta s_w)_j-(\Delta s_d+\Delta s_w)_i] \tag{6-80}$$

或写成

$$\Delta N_{ij}^{tro}=\frac{f_s}{c}[\Delta s(E_j)-\Delta s(E_i)]$$

6．最后要说明几点：

（1）由于子午卫星离地面高度为 1000km 以上，而对流层有显著折射影响的高度仅

40km 左右，所以在电磁波传播路径上仅近地面的一小部分受对流层折射影响，而这项改正数的大小主要决定于地面的气温和气压，而地面测站的海拔高程又是影响地面气温气压的决定因素。

(2) 卫星信号方向的高度角E若小于 45°，水汽影响会随E的减小而很快增大，因此要采用较准确的近似式，如 (6-78) 式。

使用 (6-71) 式时，当E近于 0° 或 90° 时，由 (6-76) 式可知，函数值变化快，因而 (6-71)式的积分结果误差大，这时要改用将被积函数展开为级数的计算式，逐项积分以保证精度 (详见参考文献 [18])。

(3) 以上导出的计算改正公式已经过实际观测检核，美国在北美及太平洋布设的 15 个观测站，曾每天用气球实测地面高空气温、气压、湿度，对公式验算，有专门报告给出了验算结果。

类似的近似计算公式还有一些，各有特点，不再列举。

(4) 在对流层和电离层折射改正的计算中，当然也应考虑传播路径受到弯曲而产生的影响，但参考文献 [18] 指出，两者的影响都很小，而且电离层产生的弯曲影响比对流层的影响更小。在对流层中，当高度角为 20° 时，路径弯曲的长度改正仅为几毫米，高度角为 10° 时，约为几厘米。因此当高度角大于 10° 时，这两种弯曲影响都可不计。

6.2.4 距离差（变率）的观测方程

将实测的多普勒计数经电离层和对流层折射改正，并且滤除个别坏的计数之后，便可建立距离差（变率）观测方程。

由 (6-24) 式

$$N=(f_g-f_S)(t_2-t_1)+\frac{f_g}{c}(r_2-r_1) \tag{6-81}$$

可得

$$(r_2-r_1)=\frac{c}{f_g}[N-(f_g-f_S)(t_2-t_1)] \tag{6-82}$$

令

$$\lambda=\frac{c}{f_g}, \quad \Delta f=(f_g-f_S) \tag{6-83}$$

则

$$(r_2-r_1)=\lambda[N-\Delta f(t_2-t_1)] \tag{6-84}$$

式中的 Δf 前已讲过，是卫星发射的频率 399.968MHz 与地面接收机基准频率400MHz之差，称为频偏。它的标称值为32kHz，但是实际上只能认为它在很短时间内是常数，因此应该表示为

$$\Delta f=\Delta f_0+d\Delta f \tag{6-85}$$

式中 $\Delta f_0=32\text{kHz}$，而$d\Delta f$ 则称为频漂，是对频偏标称值的改正数。因此 (6-84) 式应写

为

$$(r_2-r_1)=\lambda[N-\Delta f_0(t_2-t_1)]-\lambda(t_2-t_1)d\Delta f \tag{6-86}$$

式中的 $d\Delta f$ 是未知数。再考虑到上式右端是观测求得的，含有观测误差，设为 V_{12}，所以上式应为

$$(r_2-r_1)=(r_2-r_1)_0+V_{12} \tag{6-87}$$

如果用测站（实际上应是测站接收机天线的相位中心）的近似三维坐标（x_0，y_0，z_0）和卫星在上述 t_1 及 t_2 时刻已知的轨道位置（三维坐标）计算卫星到测站的距离 r_1 及 r_2，则可求出（r_2-r_1）的近似计算值 $(r_2-r_1)_c$。若将测站的精确坐标表示为

$$x=x_0+dx,$$
$$y=y_0+dy,$$
$$z=z_0+dz$$

则应在 $(r_2-r_1)_c$ 上相应地加上由于（dx，dy，dz）而产生的 dr_{12}，即

$$(r_2-r_1)=(r_2-r_1)_c+dr_{12} \tag{6-88}$$

式中的 dr_{12} 或（dx，dy，dz）是未知数，(6-87)，和（6-88）式应该相等，即

$$(r_2-r_1)_c+dr_{12}=(r_2-r_1)_0+V_{12}$$

将（6-86）式右端观测值代入，则得

$$dr_{12}+\lambda(t_2-t_1)d\Delta f=\lambda[N-(t_2-t_1)\Delta f_0]-(r_2-r_1)_c+V_{12} \tag{6-89}$$

或改写为

$$K_{12}dx+L_{12}dy+M_{12}dz+Q_{12}d\Delta f=B_{12}+V_{12} \tag{6-90}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}
K_{12}&=\frac{x_0-x_{s2}}{r_2}-\frac{x_0-x_{s1}}{r_1}\\
L_{12}&=\frac{y_0-y_{s2}}{r_2}-\frac{y_0-y_{s1}}{r_1}\\
M_{12}&=\frac{z_0-z_{s2}}{r_2}-\frac{z_0-z_{s1}}{r_1}\\
Q_{12}&=\lambda(t_2-t_1)\\
B_{12}&=\lambda[N-(t_2-t_1)\Delta f_0]-(r_2-r_1)_c
\end{aligned}\right\} \tag{6-91}$$

上式中的（x_{si}，y_{si}，z_{si}）是卫星在 t_i 时刻地心坐标系中的坐标。式（6-90）就是距离差基本观测方程。显然，它包含四个未知数，即测站坐标的三个改正数和一个频偏改正数。因此若能有四个这样的方程就可求解。如果多普勒计数的积分间隔是 4.6s，则在正常情况下，卫星一次通过测站在地平以上有 18min 可供观测，因而可获得 200 个以上的多普勒观测值，故可用最小二乘法求解。

应该注意，若不计卫星坐标的误差，不计地球自转影响，则对于同一测站，三个坐标改正数对不同次卫星通过而言都是相同的，但频偏改正数对于不同次通过各不相同，而且对于不同的卫星也不相同。

若顾及地球自转，在卫星信号经 r_i 这段距离传播到达测站所费时间 $\frac{r_i}{c}$ 内，测站相对于不随地球自转的地心坐标系中的坐标起了变化，应为

$$\left.\begin{aligned}(x_g)_0 &= \frac{1}{\cos w_\lambda}(x_0-(y)_0\sin w_\lambda)\\ &\approx x_0-y_0w_\lambda\\ (y_g)_0 &= \frac{1}{\cos w_\lambda}(y_0+(x)_0\sin w_\lambda)\\ &\approx y_0+x_0w_\lambda\\ (z_g)_0 &= z_0\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}92)$$

其中，

w_λ——$w_e r_i/c$；

w_e——地球自转角速度；

c——电磁波真空中传播速度。

在最大的情况，设 $r_i=4000\text{km}$，则 $w_\lambda=0.20''=9.7\times10^{-7}\text{rad}$；而最小的情况，取 $r_i=1100\text{km}$，则 $w_\lambda=0.06''=2.7\times10^{-7}\text{rad}$。

如果保持测站近似坐标（x_0，y_0，z_0）不变，而将上述影响并入（dx，dy，dz），显然这三个坐标改正数也不是常值，所以要用地固地球坐标系。

§6.3 单站定位的最小二乘解

若将（6-81）式表示为函数 F，则为

$$F=(r_j-r_i)\frac{f_g}{c}+(f_g-f_s)(t_j-t_i)-(N_{ij}+v_{ij})=0\qquad(6\text{-}93)$$

将其线性化，即得如（6-90）式那样的观测方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy+\frac{\partial F}{\partial z}dz+\frac{\partial F}{\partial\Delta f}d\Delta f+F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ \Delta f_0)\\ &\qquad -N_{ij}=v_{ij}\end{aligned}\qquad(6\text{-}93)\,a$$

式中各偏导数为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}&=\left(\frac{x_{si}-x_0}{r_i}-\frac{x_{sj}-x_0}{r_j}\right)\frac{f_g}{c}\\ \frac{\partial F}{\partial y}&=\left(\frac{y_{si}-y_0}{r_i}-\frac{y_{sj}-y_0}{r_j}\right)\frac{f_g}{c}\\ \frac{\partial F}{\partial z}&=\left(\frac{z_{si}-z_0}{r_i}-\frac{z_{sj}-z_0}{r_j}\right)\frac{f_g}{c}\\ \frac{\partial F}{\partial\Delta f}&=(t_j-t_i)\end{aligned}\right\}\qquad(6\text{-}94)$$

将观测方程表示为矩阵形式，则为

$$AX+W=V \tag{6-95}$$

若一次卫星通过中有m个计数观测值，则上式中：

系数矩阵（或称设计矩阵）为

$$\underset{m\times 4}{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & a_{24} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & & & a_{m4} \end{pmatrix} \tag{6-96}$$

未知改正数向量为

$$\underset{4\times 1}{X}=[dx,\ dy,\ dz,\ d\Delta f]^T \tag{6-97}$$

自由项向量（或称闭合差向量）为

$$\underset{m\times 1}{W}=[W_1,\ W_2,\ \cdots,\ W_m]^T \tag{6-98}$$

误差估值向量（或称残差向量）为

$$\underset{m\times 1}{V}=[V_1,\ V_2,\ \cdots,\ V_m]^T \tag{6-99}$$

如果在此测站观测了n次卫星通过，由于每次通过的改正数$d\Delta f$不同，故改正数向量应为$\underset{(n+3)\times 1}{X}$，系数矩阵也应为$\underset{m\times(n+3)}{A}$，自由项向量为$\underset{m\times 1}{W}$，误差估值向量为$\underset{m+1}{V}$，但是这里的$m$含意不同，应为各次通过中计数观测值的个数$m_k$（$k=1,\cdots n$）之和，即$m=\sum_{k=1}^{n}m_k$。

若给予观测值N以不同的权，则加权误差估值平方和为：

$$V^TPV=(X^TA^T+W^T)P(AX+W)=X^TA^TPAX+X^TA^TPW+W^TPAX+W^TPW$$

而

$$X^TA^TPW=W^TPAX$$

故得

$$V^TPV=X^TA^TPAX+2W^TPAX+W^TPW \tag{6-100}$$

按最小二乘平差条件，应使上式为最小，故应

$$d(V^TPV)=0$$

即

$$(2X^TA^TPA)dX+(2W^TPA)dX=0$$

但$dX\neq 0$，故只有

$$X^TA^TPA+W^TPA=0$$

或

$$A^TPAX+A^TPW=0 \tag{6-101}$$

令

$$\left.\begin{aligned}A^TPA&=N\\A^TPW&=-n\end{aligned}\right\}\tag{6-102}$$

式中N和n不是前面所用的计数和测站数符号。于是法方程为

$$NX-n=0\tag{6-103}$$

以矩阵N的逆左乘上式，即得法方程的解为

$$X=N^{-1}n\tag{6-104}$$

平差后求得的测站三维坐标（x，y，z）与卫星三维坐标同属于“地心”直角坐标系，如果要化算为大地经纬度L、B和大地高高H，可按以下熟知的公式计算：

$$\left.\begin{aligned}x&=(N+H)\cos B\cos L\\y&=(N+H)\cos B\sin L\\z&=[N(1-e^2)+H]\sin B\\\mathrm{tg}L&=\frac{y}{x}\end{aligned}\right\}\tag{6-105}$$

$$\mathrm{tg}B=\frac{z+(e')^2b\sin^3\theta}{p-(e)^2a\cos^3\theta}\tag{6-106}$$

$$H=(p/\cos B)-N$$

式中：

$$\left.\begin{aligned}p&=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\\\theta&=\mathrm{arctg}\left(\frac{z\cdot a}{p\cdot b}\right)\\N&=a(1-e^2\sin^2B)^{-\frac{1}{2}}\\e^2&=(a^2-b^2)/a^2\\(e')^2&=(a^2-b^2)/b^2\end{aligned}\right\}\tag{6-107}$$

a，b，e，e'，N分别为所取椭球的半长轴、半短轴、第一偏心率、第二偏心率、测站处卯酉曲率半径。

1975年以来，子午卫星系统采用了一个全球通用的椭球坐标系，称为WGS-72坐标系，椭球参数如下：

$$a=6378135\text{m};$$

$$f=1:298.26;$$

$$b=a(1-f)=6356750.52\text{m};$$

$$e=[f(2-f)]^{\frac{1}{2}}。$$

许多用于卫星定位的接收机都附有转换坐标的软件，可以同时求得测站属于WGS-72坐标系的坐标，如果要再化为各国或各地区所采用的椭球坐标系的坐标，显然是不困难的。

应当说明的是，子午卫星的“地心”直角坐标系实际上坐标原点并不严格位于地心。如果令ΔX，ΔY，ΔZ为这个坐标系的原点离地心的坐标，则$|\Delta X|$和$|\Delta Y|$可能有

1～2 m，而 $|\Delta Z|$ 更大些，会有5m左右（参见参考文献[31]）。

WGS-72坐标系的 Z 轴虽可认为指向CIO平极，但经度零子午面与BIH零子午面并不重合，根据参考文献[31]的资料，可能相差0.5″～0.8″。

新的WGS-84系统的椭球参数是

$$a=6378137\text{m},\quad f=1:298.257。$$

§6·4 大地测量多普勒定位接收机

1. 卫星多普勒定位接收机有两类，一类是装在运动载体（如船、艇）上用于载体导航定位，另一类是安置在地面固定测站上用于大地点定位。前者定位精度要求可较低，而体积相对地可较大，后者则需着重考虑提高定位精度和流动迁站的轻便，体积应较小。

国际上常用的大地接收机，技术上比较先进的有四个厂家的系列产品。这四个厂家分别是加拿大的马可尼（Marconi）公司，美国的JMR公司，美乐华（Magnavox）公司和莫托洛拉（Motorola）公司。其他国家也有类似产品，我国在十年前就已研制出用于导航定位的多普勒接收机，但尚未成为商品。

表6-8列举了上述四家公司的几种型号的大地接收机，图6-10～6-12是其中一些有代表性的接收机外形、主要部件的照片或示意图。除了表中所列的各型号接收机外，值得提一下的是，早期美国国防测绘局（DMA）在全北美大陆测设卫星网所用的大地接收机，型号为AN/PRR-14，这是Magnavox公司最早受命研制的产品，完成于1967年。这是一种四频接收机，可以接收两个卫星（Transit和Geos）信号，所测成果在北美大地网重新平差中起了良好作用。

表 6-8

厂　家	产品年份	型　号	积分间隔	接收机作电离层改正	记录方式	微处理机控制	附　注
Marconi	1974	CMA-722B	4.6s	否	（盒式磁带）穿孔纸带	无	
	1978	CMA-751		否	盒式磁带	有	
	1978	CMA-761		否	盒式磁带	有	
JMR	1974	JMR-1A		是	盒式磁带	无	
	1977	JMR-3A		是	盒式磁带	有	
	1979	JMR-4A		是	盒式磁带	有	
	1982	JMR-2000		是	盒式磁带	有	磁泡存储器
Magnaoox	1978	MX-1502		否	盒式磁带	有	
Motorola	1980	Mini-ranger		否	盒式磁带	有	

以上这些接收机自动化程度都很高，操作比较简单，外业设备都只有三大件：天线、电源、接收机。早期产品包括野外内业处理设备，如CMA-722B还包括光电输入机、微

计算机、电传打字机、卷带机等；后期产品则越做越轻便简单，例如JMR-2000连天线也可放在接收机箱子里，该机包括天线、接收机、处理机在内一共只有21kg，而上述的AN/PRR-14仅外业设备就有100kg。

各接收机天线中都有一个低噪前置放大器，天线接收到的卫星信号先经它放大、再经电缆传输到接收机内，接收机可以对卫星自动锁相跟踪，将卫星发射的400MHz和150MHz相位调制载波信号经由两组线路解调处理后，输出卫星时标，星历参数和多普勒频移计数等信息，记录在磁带上。两种频率以400MHz为主，150MHz的计数已按比例8/3归算为400MHz相应的计数，两种频率在各自的计数器增值之前就已混合在一个逻辑线路中。

有关各型号接收机的操作、数据输出格式等应参阅各机手册。

2. 我们在§6.2.1中曾列出表示多普勒计数的两种计算式（6-24）和（6-27），一种用卫星时标计时，一种用接收机本机时钟计时。卫星每两分钟发出按世界时计的卫星时标，但在这段时间内又恰好要发完6103个比特电文，因此每个比特都可看作时标，标称的4.6s积分间隔对应于234个比特，这个比特数就可用来为积分间隔定时，接收机在此期间可以将随频移而变化的频率差（f_g-f_r）的周数一个接一个计数下来。

频率差（f_g-f_r）的周数是由接收机计数器计数的，每一周由差频的正向零拍脉冲起算（参见图6-11，）每周一个的零拍脉冲使计数器不断增值累加。

设在图6-9中，t_1和t_2是卫星时标所表示的卫星时元，或是世界时整偶数分钟，或是某个4.601016s（234比特）的开始和终了；T_1和T_2是接收机接收到上述时标的时刻本机时钟的读数；α_1是第一个正向零拍脉冲所相应的本机钟读数，此时相应的卫星钟读数则为t_{α_1}；α_2是这个积分间隔中的最后一个零拍脉冲所相应的本机钟读数，此时相应的卫星钟读数为t_{α_2}。

显然，如果取计数的整周数，则应求出第一个和最后一个零拍脉冲所相应的时间间隔，而这个间隔又可或为本机时钟读数差（$\alpha_2-\alpha_1$），或为卫星时钟读数差（$t_{\alpha_2}-t_{\alpha_1}$）。由图可见，

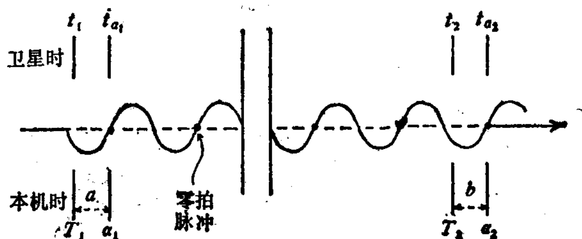


图 6-9

$$\left.\begin{aligned} t_{\alpha_1}&=t_1+(\alpha_1-T_1)\\ t_{\alpha_2}&=t_2+(\alpha_2-T_2)\end{aligned}\right\}\quad(6\text{-}108)$$

故得

$$t_{\alpha_2}-t_{\alpha_1}=(t_2-t_1)+(\alpha_2-T_2)-(\alpha_1-T_1)\qquad(6\text{-}109)$$

因此在前述的求多普勒计数的计算式中，（6-27）式可直接用本机时读数差$\alpha_2-\alpha_1$代替该式中的T_2-T_1，而在（6-24）式中应取$t_{\alpha_2}-t_{\alpha_1}$代替该式中的$t_2-t_1$。

但是要求得t_{α_2}和t_{α_1}必须知道(α_2-T_2)和(α_1-T_1)，这个计算有的接收机（例如

JMR 型）能由自己的计算机软件算出时间，读记到 0.5μs。例如由某次记录得到：

$$\alpha_1 - T_1 = 595279 - 595269 = 10\mu s$$

$$\alpha_2 - T_2 = 196259 - 196253 = 6\mu s$$

以上所讲的是保持多普勒计数为整周数的情况下，计算积分间隔时间的办法，现在大多数接收机都是用这个办法。早期的有些接收机（例如 CMA-722B）是采取保持恒定的积分间隔时间，例如图 6-9 中的 $t_2 - t_1$。而设法读出多普勒计数的整周数和小数，做法是将差频频率放大 100 倍计数，这样就可读记到 0.01周。

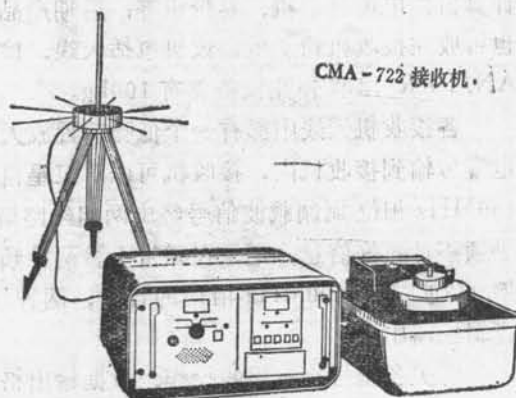


图 6-10

3. 有关使用多普勒接收机进行外业测量应注意的事项及准备工作，可参阅操作手册。内业的数据预处理，包括星历拟合，统计检验等，都有专门程序执行，不再列述。

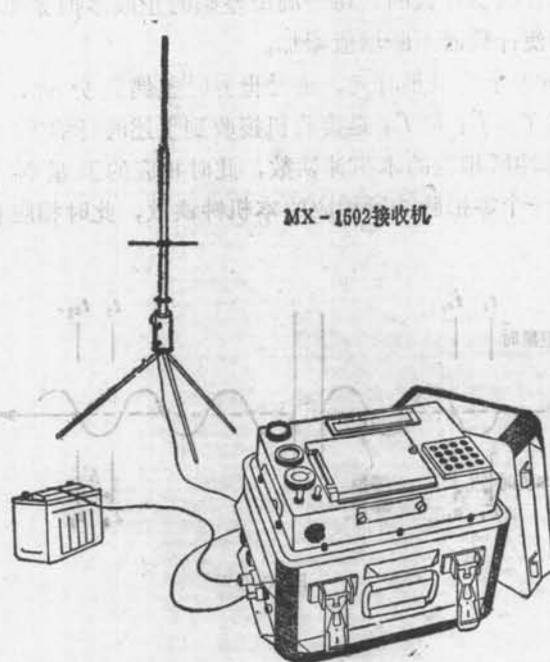


图 6-11

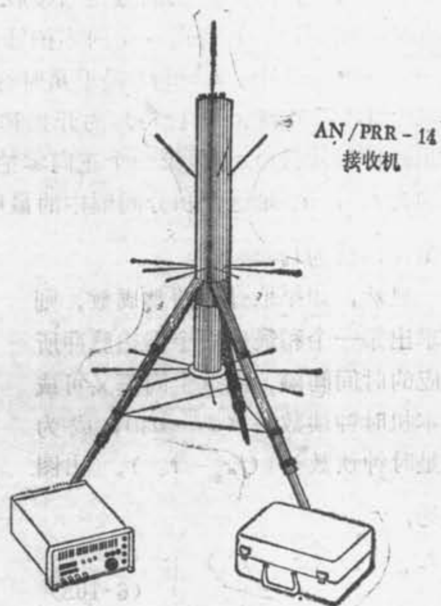


图 6-12

第七章 多普勒联测定位和短弧平差

单点定位的数学模型比较简单，各测站之间无需相互联系，在组织观测和数据处理时都十分方便，因而成为多普勒定位中最基本最常用的方法。

单点定位的基本特点是在平差计算中把卫星位置当作已知值而不作改正，精密星历的卫星位置误差较小（三个分量均在2 m以内），采用单点定位技术仍能获得较高的精度（50次卫星通过，可获得精度为0.5～1 m的定位结果），由于平差计算又很方便，因而是一种较为理想的大地定位方法。但是，精密星历是由美国国防制图局控制的，一般用户很难取得，仅能利用广播星历。广播星历误差较大，卫星在沿轨方向的中误差约为±17m，径向的中误差约为±26 m，法向的中误差约为±8 m，若仍用单点定位技术，这些起始数据的误差必然会影响定位的精度，观测100次以上的卫星通过，定位精度也只能达到3 m～5 m。为了提高多普勒定位的精度，以满足大地测量和其它方面的需要，就要采用多普勒联测定位和短弧平差的技术。

§7.1 联测定位的原理

一、概述

卫星的星历误差（尤其是广播星历）和大气折射改正的不完善是影响单点定位精度的主要因素之一。理论研究和实验结果都表明，在相距不太远的两个（或多个）测站上，对卫星进行同步观测，由于卫星的星历误差和大气折射误差对各测站的影响大致相同，因此在求这些测站间的坐标差时，这些误差的影响可大部自行消去。我们把这种在各站进行同步观测，利用卫星星历误差和大气折射误差对各测站坐标影响的相关性，求得较为准确的相对坐标的方法叫做联测定位法（Translocation)。在进行联测定位时，各站虽要使用同步观测资料，但在资料处理时则不需涉及卫星动力学的内容，因此它是介于单点定位技术和短弧平差技术之间的一种方法。

1964年，约翰·霍普金斯大学应用物理实验室（APL）的工作人员利用两台多普勒接收机共用一根天线观测了12次卫星通过做为联测方法的试验。当时利用子午卫星一次通过进行二维单点定位的标准误差为±100 m左右，但利用上述方法，卫星一次通过求得的二维坐标差的标准误差却只有7.3 m。后来又有些人改变测站间距，进行了多次试验，发现相对定位的精度随着测站间距的增加而降低，不过即使是距离增加到1700km， 相对定位的精度还是比单点定位的精度高（见参考文献［6］)。后来，韦斯特菲尔德和沃斯利便将这种方法称为联测定位法。这种方法起初是用于卫星一次通过两站二维相对定位，1970年史密斯将其扩展为卫星多次通过两站三维相对定位，1976年库巴又将其发展为卫星多次通过多站三维相对定位。

二、联测定位的相关性

当同步观测站间的距离相隔不太远时，卫星和每个测站构成的几何图形大体相同，因而卫星星历误差对各测站坐标的影响是强相关的。但随着同步观测站之间距离的增加，卫星和每个测站间构成的几何图形之间的差别将越来越大，卫星星历误差对各站坐标影响的相关程度也将随之降低。

大气折射效应的相关性，或者严格地说，是进行大气折射改正后（包括电离层折射改正和对流层折射改正），由于计算改正模式的不完善和气象元素测定误差等原因而引起的残余误差的相关性，比较复杂。其中电离层折射改正的残余误差相关性较好，即使测站间距较远时其相关性仍较明显，而对流层折射改正的残余误差相关性就较为复杂。对流层改正和测站的气象参数有关，当各站的气象参数相差甚远时，由于改正模式的不完善而引起的残余误差之间也会有较大的差异，即残余误差的相关性不好。据研究，在气候稳定的情况下，顾及高程影响后各测站上的大气压力差别是不大的，大约每隔几百公里气压才相差1毫巴（见参考文献[6]）。但是气温和湿度由于受地形、植被等因素的影响较为明显，因而有时虽仅隔几十公里，也会有很大的差别。此外对流层改正的好坏还和气候的稳定度有关，气候变化剧烈时，测站上测得的气象元素的代表性就较差，对流层改正的残余误差就会增加，由于各站的气候变化并不是“同步”的，因而残余误差的相关性也较差。所以总的说来，对流层改正残余误差间的相关性是不太稳定的，因而在进行联测定位时，应尽可能选择气候较为稳定的时期进行观测，在选择测站时也应使各测站的地形，植被等外界条件尽可能大致相同，

三、联测定位观测资料的对称性要求

在单点定位时，为了削弱系统误差提高定位精度，要求卫星每次通过时采用的多普勒计数能对称于最近点。这个要求在单点定位时是比较容易满足的，但在联测定位时，为了保证获得一定数量的观测资料以及观测资料的相关性，有时不得不放松资料对称性的要求。下面分别就两测站间的联线（以下简称测线）平行于卫星轨道和垂直于卫星轨道这两种特殊情况进行讨论：

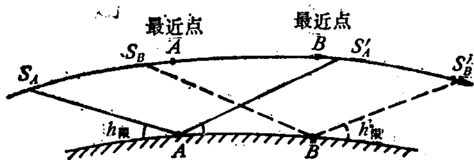


图 7-1　平行测线图

(1) 测线平行于卫星轨道

在图7-1中，$S_AS'_A$为A站可观测到的弧段，$S_BS'_B$为B站可观测到的弧段。在严格的联测定位中，为了保持资料的相关性，只允许使用同步观测资料，即弧段$S_BS'_A$中的多普勒计数，但这样就会使A、B两站的多普勒计数都不对称于各自的最近点。显然这种不对称性随着测站间距的增大而增大，当测站间的距离增大到一定限度后，各站的多普勒计数将完全位于最近点的一侧，而使观测资料完全不对称于最近点，为了更好的说明问题，参考文献[6]引入了联测定位中多普勒计数的对称重叠度（Degree of symmetric overlap-ping 简称DSO）的概念，其定义为在A站的卫星最近点左边（或右边）采用的多普勒计数的个数和测站B卫星最近点左边（或右边）采用的多普勒计数个数之比，若把地球看成是圆球，卫星轨道看

成是圆形轨道，它实际上就表示在任一测站的最近点两侧多普勒计数之比。图 7-2 表示当 $h_{限}=10°$ 时，对称重叠度（DSO）、测线长度 D 和卫星通过时的最大高度角 h_m 三者之间的关系。如果两测站间的距离为 1100 km，卫星通过时的最大高度角为 50°，则对称重叠度 DSO = 56%。如果最大高度角 $h_m=30°$，为了保证对称重叠度不小于50%，则测站间距必须不大于 1200 km。

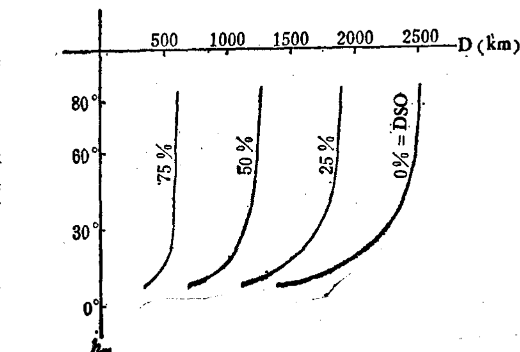


图 7-2

(2) 测线垂直于卫星轨道

在这种情况下，当卫星通过测线时（指卫星星下点的轨迹和测线相交）卫星星历误差和对流层折射误差对两站坐标的影响是相反的，即误差是负相关的，在求坐标差时这些误差不能得到消除。因此在联测定位时，为了保持误差的正相关性，应不测在两站之间的卫星通过而仅观测测线以外的卫星通过。这时，同步跟踪站公共采用的多普勒计数，其相应的卫星高度角对不同测站是不同的，虽然这会在联测定位的成果中引入某些误差，但这种影响是比较小的，(详见参考文献[6])。

由于卫星从测线外通过，A，B 两站可观测的弧段（满足高度角 $>h_{限}$ 条件的弧段）长度是不同的。在图 7-3 中，$S_AS'_A$ 为 A 站的可观测弧段，$S_BS'_B$ 为 B 站的可观测弧段，即两站的公共可观测弧段。显然，随着测线距离的增长，两站的公共可观测弧段将越来越小，逐渐趋于零。

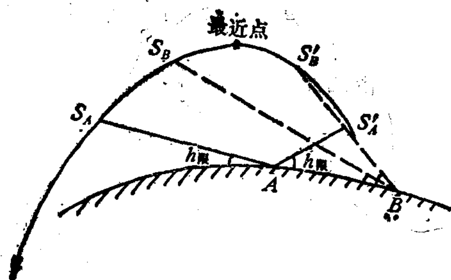


图 7-3

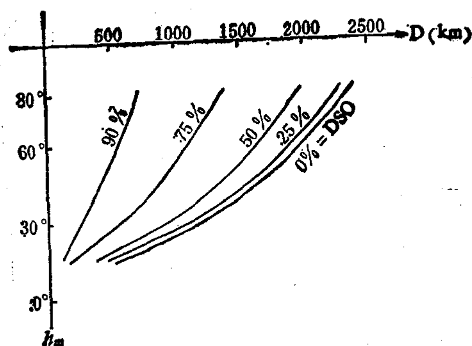


图 7-4

从上面的讨论可以看出，在联测定位中，为保持观测资料的相关性，对两站观测资料同步的要求和观测资料应对称于最近点的要求是相矛盾的（测线平行于轨道方向时），并且会丢失大量有用的观测资料（测线平行或垂直于卫星轨道方向）。因此在测站间距很长的情况下，有时就不得不放弃或放松"使用同步观测资料"的要求，以便能利用较多的观测资料，同时增加资料的对称性。

图 7-4 表示垂直测线上的对称重叠度（DSO）、卫星最大高度角（h_m）和测线长度

（D）之间的关系。对称重叠度的定义仍和在平行测线上的定义相同。这里需要特别指出的是，对称重叠度和资料的对称性两者的概念并不完全相同，例如在图 7-3 的情形，对称重叠度 DSO 约为 40%，而观测资料却可能是完全对称的。

§7.2 联测定位的方案及精度

一. 方案

联测定位采用何种观测及计算方案，取决于接收机的数量、测站间的距离、以及是使精度达到最高，还是既要达到某一精度又使测量费用最省等因素。

显然，进行联测定位至少需要两台接收机，如果是仅有两台接收机的情形，则通常采用的布设方案是"星形"方案，即将一台接收机放在主站不动，而另一台接收机则在围绕基站的一系列从属测站上依次工作。如果有两台以上的接收机，也能使用这种方案，这种方法的优点是主站能成为后勤中心，而且在从属站上可使用仅能记录多普勒计数的简化型接收机。

另一种方案就是如库巴在 1976 年所述的办法，每次前后交错地移动一台接收机，依次通过整个测区。

当测站间距很短时（小于 1 km），有可能严格使用同步观测资料。由于相关性很强，即使不进行大气折射改正也能获得较好的相对定位结果。

在中等间距上（指测站间距从 1 公里到几百公里），严格的数据同步性能大大改进定位结果，当星历误差较大时（如使用广播星历）尤其需要这样。

在长间距上，要求严格的数据同步性将会使数据产生严重的不对称，而且还会丢失大量宝贵的观测资料，因此并不见得有利。如前所述，此时应放弃或放松对各站数据同步性的要求。

各站的计算方法仍和单点定位相同，只是在联测定位中所求的是进行了同步观测的各站间的坐标差。

二、精度估算

在联测定位中，常用测线长度中误差来表示联测定位的精度。图 7-5 和图 7-6 分别表示卫星轨道平行于测线和垂直于测线的情况下，当卫星最大高度角为 40° 时，对称重叠度

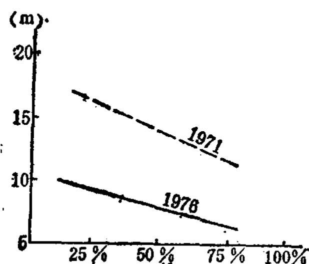


图 7-5 平行于测线

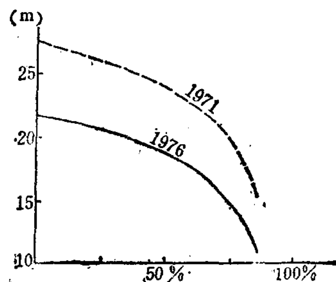


图 7-6 垂直于测线

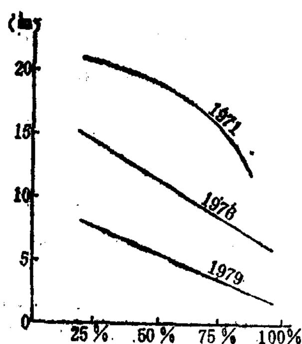


图 7-7　任意方向测线

和联测定位精度（卫星一次通过）之间的关系。它们均引自参考文献[6]，是原作者根据图 7-2、图 7-4以及有关联测定位的资料求得的。

但在实际工作中，测线一般不会恰好是平行于或垂直于测线。图 7-7 绘出了测线位于任意方向时，对称重叠度和联测定位精度之间的关系。该图也摘自参考文献[6]，是根据 1971 年，1976 年和 1979 年的实测资料求得的。从图中可以看出，由于这几年来多普勒定位技术无论在硬件或软件方面都有了改进，因而定位精度有所提高。

为了能事先估算联测定位的精度，以便在作业前进行布网设计，参考文献［6］根据 1979 年实测资料求得了联测定位精度估算公式为

$$m=(1.5+4.4\times10^{-6}\times D)/\sqrt{n} \tag{7-1}$$

式中D为测线长度，以米为单位，n是卫星通过的次数，式（7-1）适用于测线长度在 1500 km 以内，卫星最大高度角在 30°～60° 范围内的情况，超出这个范围时，估算精度就会下降。使用（7-1）式来估算我国已进行的卫星多普勒联测定位的结果，精度一般都好。上述公式虽然是在最大高度角为 40° 的情况下求得的，但大体上可以反映出联测定位的一般精度，其中平行测线的精度可能略高些，垂直测线的精度则略低些。

取卫星的通过次数为 50 次，据式（7-1）计算出不同测线长度时联测定位的精度，列于表 7-1 中。

联测定位精度估算表　　表 7-1

测线长度(km)	20	50	100	500	1000
联测定位的精度(m)	0.22	0.24	0.27	0.52	0.83

因此，可以提出一个一般性的建议：联测定位时测线长度一般以不超过 700 km 为宜，对称重叠度不小于 50%。在这种情况下，若同步观测有至少 25 次合格的卫星通过，那么联测定位的精度可优于± 2 m。

（3）实例

目前，国内外已有大量的联测定位资料，下面以我国实测的资料为例，加以说明。

是在这我国中部地区的六个一等三角点上进行的联测定位试验。最长边为 33 km，最短边为72 m，见图 7-8。为了对联测定位结果进行外部检核，又用激光测距仪测定了从 500 点至 105，205，305，405 各 点的距离。

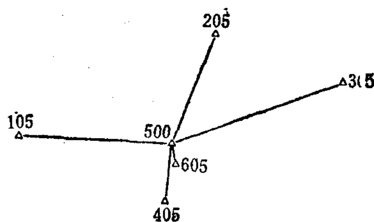


图 7-8　试验网点位分布图

联测定位采用两台MX 1502接收机进行，一台接收机始终设置在中点站500上，另一台接收机则依次设置在105，205，305，405，605等点上，总共观测837次合格卫星通过，其中中点站500上观测了454次合格卫星通过，其余各站上的合格卫星通过数均不少于70次。

采用MX-1502提供的程序进行了计算。其中点105的相对点位中误差最大，约为±0.47 m，点605的相对点位中误差最小，约为±0.40 m，相对点位中误差的平均值为±0.43 m。三个坐标分量的中误差平均值分别为：纬度方向±0.22 m，经度方向±0.28m，大地高：±0.23 m。

用激光测距的边长作为标准长度对大地测量成果和多普勒联测定位成果进行外部检核，结果列于表7-2中。

空间弦长比较表　　表7-2

边　名	激光测距弦长 (m)	大地弦长 (m)	Δ (m)	联测定位弦长 (m)	Δ (m)
500～105	××776.017	××775.942	+0.075	××775.681	±0.336
500～205	××010.560	××010.356	+0.204	××010.510	+0.050
500～305	××262.058	××261.832	+0.226	××261.712	+0.346
500～405	×594.474	×594.463	+0.011	×594.079	+0.395
m_D			±0.157		±0.313

若平均边长为25 km，则一等三角边长的外精度平均为1/16万，联测定位的平均外精度为1/8万。从这次试验的成果分析中发现，实测的结果中存在着明显的长度比，激光测距的每条边长均比大地测量和联测定位的结果要长，因而有必要对此作进一步的研究。因为在改正了长度比的影响后，无论是大地测量的成果或多普勒联测定位的成果其精度均能得到明显的改善。

§7.3　短弧平差的基本概念

在单点定位和联测定位中，都是把卫星的位置当作已知数而未加任何改正，因此当卫星的星历误差较大时（如使用广播星历表），严重影响单点定位的定位精度，联测定位虽可利用误差的相关性消除星历误差对各站坐标影响的公共部分，求得较为准确的相对坐标，但联测定位要求观测资料同步，因而不得不舍去大量宝贵的观测资料，当测站间距较大时，这个问题尤为突出，而且相关性将随之降低，定位精度也将越来越差。

短弧平差是不再把卫星的位置当作已知值，而把它们看成带有误差的未知数，并且只要求各站记录的是同一次卫星通过中的多普勒计数，而不是像联测定位那样要求使用相同的多普勒计数，或者说只要求各站的观测值位于同一条轨道短弧段上，而不要求这些观测值相互重合。这样，短弧平差技术就为多普勒定位的数据处理提供了一条新的途径，特别是在使用广播星历时，这一方法有很大的优点。由于在这种处理方法中，广播星历是和测站坐标的近似值以及各种参数（如频漂，大气折射因子等）的近似值一起参加平差计算，

能同时求得较为精确的卫星星历，测站坐标以及各种参数，所以对于只能得到广播星历的国家，在建立多普勒网时大多采用短弧平差法。

在短弧平差中，既可以把六个轨道根数都当作未知数，也可以仅把部分轨道根数当作未知数。前者称为（全）短弧法，后者称为半短弧法。在半短弧法中，一般只假定三个轨道改正数：即长半径改正数 da，沿轨改正数 de 和偏离轨道平面改正数 $d\eta$。库巴（J. Kouba）在他编的 GEODOP 程序中就是这样处理的，这样做是以下列假定为前提，即：广播星历所确定的卫星短弧轨道和精密星历确定的相应短弧轨道可以认为是相互平行的，因此只需在广播星历的轨道上加上上述三个改正数后就可使两个轨道彼此完全重合（见参考文献[27]）。

但是有些学者认为，在远离广播星历地面跟踪网（OPNET）的那些地区，广播星历和精密星历的两条相应短弧的平行状态可能并不理想而存在着一个微小的交角 $d\theta$，所以在这些地区的半短弧平差中，有必要增加第四个轨道改正数——旋转角 $d\theta$，以便使两条短弧彼此平行。我国学者陈俊勇据此提出了具有四个轨道改正数的“简化短弧法”（SS-AM）（见参考文献[6]）。

试验结果表明，短弧法定位的精度与半短弧法定位的精度大体相当，但前者数据处理的工作量较大，对电子计算机的要求也较高。

短弧法定位求得的相对点位精度较高，一般认为，若测站间距在 200～1000 km 时，精度可达 0.5 m～1 m。利用广播星历采用短弧法平差求得的绝对坐标，一般也比联测定位的结果精度要高些。欧洲多普勒会战的结果表明，使用广播星历，各站观测 20～30 次共同的卫星通过，当测站间距为 100 km 时，相对定位的精度可达 0.2 m～0.3 m。在东西方向上，测站间距离每增加 100 km，精度约下降 0.1 m；南北方向上，测站间距离每增加 100 km，精度约下降 0.05 m。



图 7-9 全国多普勒网测站分布图

1980年，我国曾测算过一个全国范围的卫星多普勒网。全网由37个测站组成，测站间的平均间距为800 km，最大间距为1300 km，全网分为八个区，各区之间都有2～4个公共点联系，每个区中各站均利用MX-1502接收机进行观测，至少接收100次合格的卫星通过，分别采用单点定位、联测定位和短弧平差法对上述资料进行了处理。单点定位的内符合精度为±1.99 m，对42条在两端进行了同步观测的测线进行了联测定位计算，每条测线上平均观测了38次合格的卫星通过，内符合精度为±0.54 m。此外还在HP-2108计算机上对37个点的资料进行了短弧平差，内符精度约为±1 m，绝对坐标的精度估计约为±2m。

图（7-9）是这个全国多普勒网的测站分布网。

第八章　利用卫星大地测量资料检核和加强天文大地网的问题

§8.1　天文大地网的系统误差

在建立天文大地网的过程中，人们虽然采取过种种措施来消除和削弱系统误差的影响，但是由于各种外界因素影响十分复杂，难以完全查明或完善地模型化，因此一般说，每个天文大地网中还会不同程度地存在系统误差，主要表现在：

一、系统性的长度变形

这种系统误差可能来源于丈量网的基线和起始边的器具如铟钢基线尺或测距仪的系统误差。例如，检定铟钢基线尺时所用的 3 m标准杆尺若有 3 μ 的误差，就会使全网产生 1 ppm 的长度变形。这种系统误差还可能是由于高程异常的误差引起的，例如高程异常若有 3～5 m 的误差，就会使投影到椭球面上的长度产生 0.5 ppm～0.8 ppm 的长度变形。

天文大地网中各局部区域，由于测量作业时间不同，外界条件不同，所用仪器不同，测量工具和方法也不尽相同（如我国部分边长是用铟钢基线尺丈量基线经基线网扩大的，部分边长是用激光测距仪直接测定的），不同时期执行的规范细则也不完全相同，产生的系统误差也就不同，因此在较大规模的天文大地网中，还可能存在着局部性的长度变形。

表 8-1 中列举了按 SAO 标准地球Ⅱ求得的国外各主要大地坐标系统的长度变形。

表 8-1

坐标系统	北美大地基准 NAD27	欧洲大地基准 ED50	南美大地基准 SAD69	澳大利亚大地基准 AUGD
长度变形	1.78 ppm	2.60 ppm	−1.39 ppm	2.33 ppm

我国天文大地网的长度变形还未精确测定，但在这方面已经做了一些有意义的工作。

二、系统性的方向扭曲

产生系统性方向扭曲有下列原因：

(1) 旁折光的影响

由于不同纬度地区的大气密度不同而产生的“地球旁折光”，会使天文大地网中东西走向的一等锁段产生系统性的扭曲，此外局部地形、地貌、植被等因素的影响也会产生局部性的系统扭曲。例如我国天文大地网中位于沙漠边缘和某些沿海地区的一等锁段中就明显地受到这种旁折光的影响。

(2) 天文方位角的误差

我国一等天文方位角测定的内符合精度为0.6″左右，但根据全国天文大地网平差中方位角条件不符值求得的平均误差却远比此值要大，苏联大地网中方位角测定的实际误差平均为1.8″左右。方位角的这种系统误差主要是测定天文方位角所用经纬仪的轴颈误差、人差和大气折光等原因引起的，它会使整个锁段产生系统性的偏转。

我国的天文大地网从五十年代初开始布设，历时三十年，统一平差工作于1982年完成。天文大地网中有一等锁近八万公里，构成120多个锁环，共有一等三角点近五千个。另有一等导线一万多公里，包含约五百个一等导线点，参加全国天文大地网平差的一、二、三等点共约五万个。平差结果表明，我国的天文大地网是一个大规模高精度的网，平差后一等观测方向中误差为±0.46″，离大地原点最远的点的点位中误差为±1.1 m。根据对我国天文大地网统一平差的资料分析，初步表明，我国天文大地从总体上讲是偶然误差占主导地位，但在比例尺和方向上也存在系统误差，而且这些系统误差在局部地区更为明显。

由于系统误差的存在，离大地原点较远地区的点位实际精度就远比平差中估计的精度差，因此如何利用外部标准对天文大地网的实际精度进行可靠的检核，进而提高天文大地网的实际精度，就一直是受到重视的问题。为了达到上述目的，要求检核手段必须具有更高的精度，并且不受上述那些系统误差的影响。甚长基线测量、卫星多普勒定位（特别是利用全球定位系统GPS进行精密大地定位），激光测距（地面和空间）等技术，为这种检核提供了可能性，并且已在世界上一些地区如北美进行过。目前检核和加强天文大地网问题已成为卫星大地测量的重要任务之一。

§8.2 两网转换的数学模型

一、概述

这里的两网是指人卫大地网（以下简称卫星网）和天文大地网（以下简称地面网），它们是采用不同的方法建立起来的，各测站的坐标分别属于不同的坐标系，地面网的测站坐标属于参心坐标系，而卫星网的测站坐标一般认为是属于地心坐标系（虽然可能尚含有几米的误差）。此外，由于两网中都不可避免地存在着系统误差，即使两网已转换到同一坐标系统中，仍会存在相对的系统性长度变形和系统性方向扭曲，因此在进行两网的统一平差之前，必须首先研究两网的转换和配合问题。

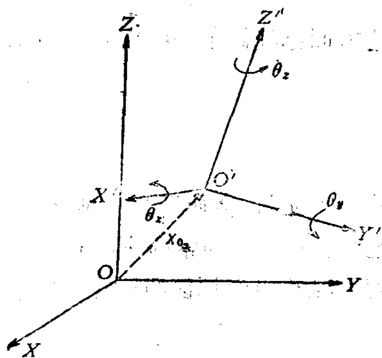


图 8-1

(1) 坐标系统的转换：

如图8-1所示，空间任一直角坐标系$O'-X'Y'Z'$一般可以用分别绕X'轴旋转θ_x角，绕Y'轴旋转θ_y角，绕Z'轴旋转θ_z角的方法，在保持坐标原点O'不动的情况下，使三个坐标轴分别平行于另一个空间直角坐标系$O-XYZ$的X轴、Y轴、Z轴，θ_x、θ_y、θ_z称为坐标转换中的三个旋

转参数或三个定向参数。然后再将旋转后的坐标系平移 $\boldsymbol{X}_O=(X_O, Y_O, Z_O)^T$，即可使两个坐标系重合。因此空间两个直角坐标系之间的转换关系式一般可表示为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_O+\boldsymbol{R}(\theta_x, \theta_y, \theta_z)\boldsymbol{X}' \tag{8-1}$$

式中 $\boldsymbol{X}_O=(X_O Y_O Z_O)^T$ 为坐标原点 O' 在 $O\text{-}XYZ$ 中的坐标向量。

X_O、Y_O、Z_O 称为坐标系转换的三个平移参数或定位参数，而旋转矩阵则为

$$\boldsymbol{R}(\theta_x\theta_y\theta_z)=\boldsymbol{R}(\theta_z)\boldsymbol{R}(\theta_y)\boldsymbol{R}(\theta_x) \tag{8-2}$$

其中，

$$\boldsymbol{R}(\theta_z)=\begin{bmatrix}\cos\theta_z & \sin\theta_z & 0\\ -\sin\theta_z & \cos\theta_z & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}(\theta_y)=\begin{bmatrix}\cos\theta_y & 0 & -\sin\theta_y\\ 0 & 1 & 0\\ \sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{R}(\theta_x)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta_x & \sin\theta_x\\ 0 & -\sin\theta_x & \cos\theta_x\end{bmatrix}$$

当旋转角 θ_x、θ_y、θ_z 数值很小时，可略去二阶微小量，则（8-2）式简化为

$$\boldsymbol{R}(\theta_x\theta_y\theta_z)=\begin{bmatrix}1 & \theta_z & -\theta_y\\ -\theta_z & 1 & \theta_x\\ \theta_y & -\theta_x & 1\end{bmatrix} \tag{8-3}$$

（2）网的配合

进行坐标系变换之后，还需消除两网的相对系统误差，才能进行统一平差，这一工作称为网的配合。它包括：

（a）消除系统性的长度变形

设卫星网的尺度因子为

$$m_S=\frac{dX_S}{X_S}=\frac{dY_S}{Y_S}=\frac{dZ_S}{Z_S}=\frac{dR}{R} \tag{8-4}$$

地面网的尺度因子为

$$m_T=\frac{dD}{D}$$

相对尺度因子：$m=m_T-m_S$ (8-5)

在下面的各种转换模型中，我们都采用下式消除两网中存在的系统性相对长度比影响。

$$S_S=(1-m)S_T \tag{8-6}$$

式中 S_S，S_T，分别为卫星网和地面网中对应线段的长度。

由（8-6）式可知，这样求得的尺度因子 m 只表示地面网相对于卫星网的尺度因子，因此只有当卫星网的尺度因子小得近于零，从而可略去，或者可用某种方法另行确定时，

才能求得地面网的真正的长度比。

(*b*) 消除两网中系统性的方向扭曲

图 8-2 中，P_0 为大地网中某点（例如大地原点）。地面网相对于卫星网的系统性方向扭曲用三个旋转角（α、μ、ν）表示。图中 Z 轴与法线方向重合，X 轴指向北，Y 轴指向东。这样，只需乘上一个旋转矩阵 $\boldsymbol{R}$（α，μ，ν）就可消除两网相对系统性方向扭曲。Krakiwsky-Thomson 的转换模型就是如此处理的。

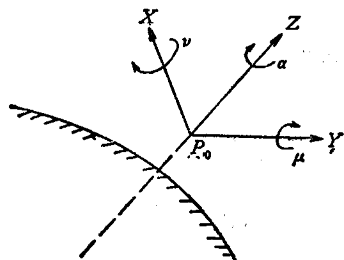


图 8-2

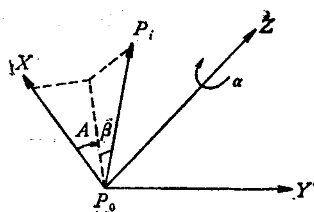


图 8-3

图 8-3 中，P_0 为大地网中的原点，P_i 为某一大地点，地面网相对于卫星网的系统性方向扭曲，用绕 Z 轴的旋转角 α 和 P_0P_i 在垂直方向的定向误差 β 表示。Hotine 的转换模型就采用了这种简化的只有两个旋转参数的模型。

还有些转换模型，如 Bursa-Wolf 模型，则不考虑网的系统性扭曲，而仅考虑坐标系的不平行。

二、常用的几种转换模型

自从卫星观测资料用于大地测量以来，许多学者对两网的转换模型进行过大量的研究，提出了许多转换模型。现将几种主要的模型简述如下：

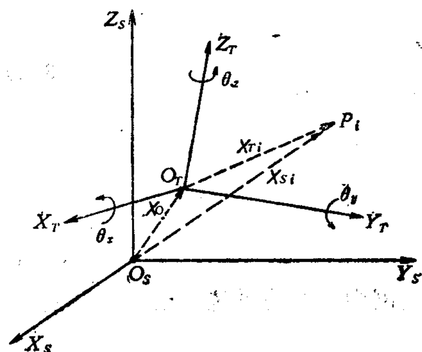


图 8-4

(*a*) Bursa-Wolf 模型

这个模型是由 Bursa 和 Wolf 先后于 1962 年和 1963 年提出的。如图 8-4 所示，其中：

$$\boldsymbol{X}_{Si}=\begin{pmatrix}X_{Si}\\Y_{Si}\\Z_{Si}\end{pmatrix}$$

为卫星网中测站 P_i 在地心坐标系中的空间直角坐标。其值可以由卫星大地测量方法直接求得。

$$\boldsymbol{X}_{Ti}=\begin{pmatrix}X_{Ti}\\Y_{Ti}\\Z_{Ti}\end{pmatrix}$$

为地面网中测站 P_i 在参心坐标系中的空间直角坐标，其值可以根据大地经纬度和大地高用（4-10）式求得。

虽然，在进行参考椭球体定位时，总是力求使参心坐标系平行于地心坐标系，于种种原因，参心系与地心系的三个坐标轴之间实际上还是存在着微小的夹角，因坐标系的转换除了三个平移参数外，也需要三个旋转参数。由于这个模型仅引入相因子而未单独考虑网的旋转，所以 Bursa-Wolf 转换的数学模型便写为

$$X_{Si}=X_O+(1-m)R(\theta_x,\ \theta_y,\ \theta_z)X_{Ti} \qquad (8\text{-}7)$$

式中：$X_O=(X_O,\ Y_O,\ Z_O)^T$ 为参心在地心坐标系中的坐标向量。此外由于 θ_x，θ_y，θ_z 一般均为 10^{-5} 级的微小量，故旋转矩阵 $R(\theta_x\theta_y\theta_z)$ 可用（8-3）式的形式表示。于是略去高次项，式（8-7）可写为

$$X_{Si}=X_{Ti}+X_O-mX_{Ti}+Q(\theta_x\theta_y\theta_z)X_{Ti} \qquad (8\text{-}8)$$

式中，

$$Q(\theta_x\theta_y\theta_z)=R(\theta_x\theta_y\theta_z)-E$$

$$=\begin{pmatrix}0 & \theta_z & -\theta_y\\ -\theta_z & 0 & \theta_x\\ \theta_y & -\theta_x & 0\end{pmatrix}$$

E 为单位矩阵。

Bursa-Wolf 模型一般描述了两网之间的相似变换，优点是形式简单，因而被广泛用于确定参心坐标系的转换参数和分析地面网相对于卫星网的相对尺度比。

(*b*) Molodensky-Badekas 模型

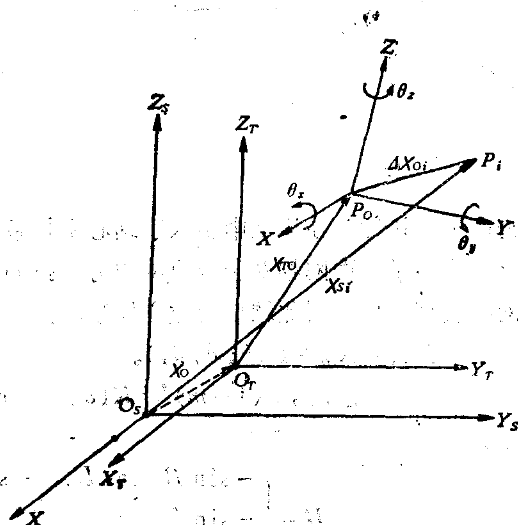


图 8-5

如图 8-5 所示，在Molodensky-Badekao 模型中，是假设参心坐标系 $O_T-X_TY_TZ_T$ 平行于地心坐标系 $O_S-X_SY_SZ_S$，因而在坐标系转换中只引入三个平移参数。为了表示地面网相对于卫星网的系统性长度变形和方向扭曲，在模型中引入了一个以站心 P_O 为原点的空间直角坐标系，该坐标系分别绕 X、Y、Z 轴旋转 θ_x，θ_y，θ_z 角后，即与参心坐标系和地心坐标系平行，并且是在该坐标系中定义相对尺度因子，即

$$(\Delta X_{Oi})_S=(X_{Si}-X_{SO})=(1-m)\ (\Delta X_{Oi})_T=(1-m)\ (X_{Ti}-X_{TO})$$

于是 Molodensky-Badekas 转换的数学模型可写为

$$X_{Si}=X_O+X_{TO}+(1-m)R(\theta_x\theta_y\theta_z)\ (\Delta X_{Oi})_T \qquad (8\text{-}10)$$

略去二阶微小量，可写为

$$X_{Si}=X_{Ti}+X_O-m(\Delta X_{Oi})_T+Q(\theta_x\theta_y\theta_z)\ (\Delta X_{Oi})_T \qquad (8\text{-}11)$$

显然，Bursa-Wolf 模型和 Molodensky-Badekas 模型所定义的尺度因子 m 和旋转参数（θ_x，θ_y，θ_z）是相同的，因此根据（8-8）式和（8-11）式可求得两种模型的平移参数有下列关系：

$$(X_O)_{B-W}=(X_O)_{M-B}+mX_{TO}-Q(\theta_x\theta_y\theta_z)X_{TO} \qquad (8\text{-}12)$$

需要指出的是，虽然用不同的模型求得的转换参数不同，但是根据它们对应的转换公

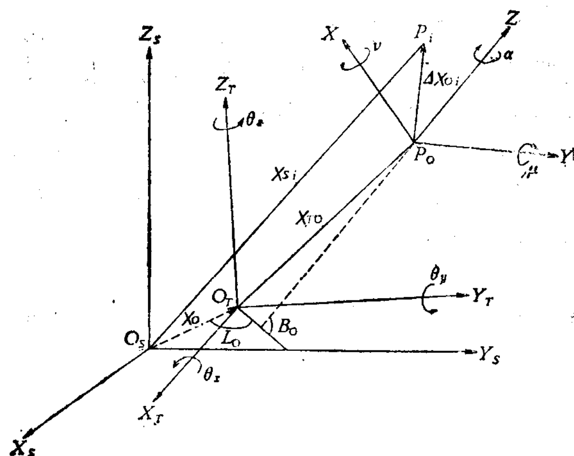


图 8-6

式求出的地心坐标却是一致的，从这个意义上讲，两种转换模型是等价的。因此我们在使用一组转换参数时，必须首先弄清它们是用那种转换模型求得的，然后才能正确地用相应转换模型进行转换。

(c) Krakiwsky-Thomson 模型

在 Krakiwsky-Thomson 模型中，是假设参心坐标系 $O_T\text{-}X_TY_TZ_T$ 不平行于地心坐标系 $O_S\text{-}X_SY_SZ_S$，因而在进行坐标系统的转换时就有三个平移参数和三个旋转参数。为了表示地面网相对于卫星网的系统性长度变形的方向扭曲，在模型中引入了站心坐标系 $P_O\text{-}XYZ$，用该坐标系的三个旋转角（α、μ、ν）来表示地面网相对于卫星网的方向扭曲，用相对尺度因子 m 来表示地面网相对于卫星网的长度变形，因此转换的数学模型写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_{Si} = \boldsymbol{X}_O + \boldsymbol{R}(\theta_z\ \theta_y\ \theta_x)\cdot \\ [\boldsymbol{X}_{TO} + (1-m)\boldsymbol{H}^T\boldsymbol{R}(\alpha、\mu、\nu)\boldsymbol{H}(\Delta\boldsymbol{X}_{Oi})_T] \end{aligned} \tag{8-13}$$

式中，

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} -\sin B_O\cos L_O & -\sin B_O\sin L_O & \cos B_O \\ -\sin L_O & \cos L_O & 0 \\ \cos B_O\cos L_O & \cos B_O\sin L_O & \sin B_O \end{bmatrix} \tag{8-14}$$

略去二阶微小量，式（8-13）可写为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{X}_{Si} = \boldsymbol{X}_{Ti} + \boldsymbol{X}_O - m(\Delta\boldsymbol{X}_{Oi})_T + \boldsymbol{Q}(\theta_z\ \theta_y\ \theta_x)\boldsymbol{X}_{Ti} \\ + \boldsymbol{H}^T\boldsymbol{Q}(\alpha、\mu、\nu)\boldsymbol{H}(\Delta\boldsymbol{X}_{Oi})_T \end{aligned} \tag{8-15}$$

这种模型共有 10 个转换参数（其中六个为坐标变换参数，四个为网的配合参数），这些参数和 Bursa-Wolf 模型及 Molodensky-Badekas 模型的参数之间没有确定的转换关系。

从上面列举的三种模型可以看出，在进行坐标系变换和网的配合时，由于对参心坐标系的定向不同的假设，作了不同的处理，又由于表示地面网相对于卫星网的系统误差时，引入不同的参数，因而形成了不同的转换模型，这是共同的特点。按这个道理，曾经又派生出许多其他的模型，较常见的还有 Veis 模型，Hotine 模型，Wells-Vanicek 模型，等等，不再细述（可参阅参考文献[7]）。现将这些常见的转换模型归纳在表 8-2 中（引自参考文献[7]）。

由于上述各种模型无论在引入附加参数的个数上或在方法均有差异，因而用这些模型求得的坐标系统转换参数，以及表示地面网相对于卫星网系统误差的各参数也不相同。这

几种转换模型一览表　　表 8-2

模型名称	年代	参数个数	模型表达形式
Veis	1960	7	$X_{Si}=X_o+(1-m)H^TR(\alpha,\ \mu\ \ \nu)H(\Delta X_{oi})_T+X_T$
Molodensky-Ba.ekas	1962	7	$X_{Si}=X_o+(1-m)R(\theta_x\theta_y\theta_z)(\Delta X_{oi})_T+X_{To}$
Bursa-Wolf	1962	7	$X_{si}=X_o+(1-m)R(\theta_x\theta_y\theta_z)X_{Ti}$
Hotine	1969	9	$X_{Si}=X_o+R(\theta_x\theta_y\theta_z)(X_{To}+(1-m)H^TR(\alpha,\ \beta)H(\Delta X_{oi})_T$
Wells Vanicek	1975	11	$R(\omega,\ \psi,\ \varepsilon)X_{si}=(\Delta X_{GT}-\Delta X_{GS})+(1-m)R(\Delta)X_{Ti}$
krakiwsky-Thomson	1976	10	$X_{Si}=X_o+R(\theta_x\theta_y\theta_z)[X_{To}+(1-m)HTR(\alpha,\ \mu,\ \nu)H(\Delta X_{oi})_T]$

就有一个如何选择转换模型的问题。此外，利用 Hotine 模型或 Krakiwsky-Thomson模型时，是否能同时解得坐标变换的旋转参数（θ_x、θ_y、θ_z）和网的定向参数（α、β）或（α、μ、ν）；而在 Bursa-Wolf 模型中，由于地面网和卫星网的尺度因子定义不同而会使平移参数 X_o 带来附加误差，等等，这些问题这里不再细述，需要时可参阅参考文献[7]。

三、二维转换模型

从下式可知，参心直角坐标的精度与大地高H的精度有关。

$$\left.\begin{aligned} X &= (N+H)\cos B\cos L \\ Y &= (N+H)\cos B\sin L \\ Z &= [N(1-e^2)+H]\sin B \end{aligned}\right\}$$

若大地高的误差为 dH，引起参心直角坐标的误差为：

$$\left.\begin{aligned} dX &= dH\cos B\cos L \\ dY &= dH\cos B\sin L \\ dZ &= dH\sin B \end{aligned}\right\} \tag{8-16}$$

引起尺度因子的误差为

$$dm=\frac{dH}{R} \tag{8-17}$$

以我国中部地区（$B=35°$，$L=105°$）为例，大地高的误差 dH 引起的直角坐标误差及尺度因子误差的数值如表 8-3 所示。

大地高H等于正常高 h 加上高程异常 ζ，正常高 h 可用水准测量的方法以很高的精度测定，但高程异常 ζ 却只能用天文水准或天文重力水准的方法测定，一般精度较低。因此在目前大地高测定精度较平面位置测定精度低的情况下，为了保证转换参数的精度，应考虑采用二维转换模型。

表 8-3

dH (m)	dX (m)	dY (m)	dZ (m)	dm (ppm)
0.5	−0.11	0.40	0.29	0.08
1.0	−0.21	0.79	0.57	0.16
3.0	−0.64	2.37	1.72	0.47
5.0	−1.06	3.96	2.87	0.78
10.0	−2.12	7.91	5.74	1.57

在顾及三个平移参数（$X_oY_oZ_o$），三个旋转角（$\theta_x\theta_y\theta_z$），尺度因子 m，以及两个椭球体的差异 da 和 $d\alpha$ 时，二维坐标的差异可表示为（见参考文献[7]）

$$B_S - B_T = \frac{1}{M+H}(-\sin B\cos L\cdot X_o - \sin B\sin L\cdot Y_o + \cos B\cdot Z_o)$$

$$-\frac{(2-\alpha)\alpha\cdot N}{M+H}\cos B\sin B\cdot m_S + (1+e^2\cos^2 B)\sin L\cdot\theta_x$$

$$-(1+e^2\cos^2 B)\cos L\cdot\theta_y + \frac{N}{M+H}e^2\sin B\cos B\frac{da}{a} + \frac{M}{M+H}$$

$$(2-e^2\sin^2 B)\sin B\cos B\frac{d\alpha}{1-\alpha}$$

$$L_S - L_T = \frac{1}{N+H}(-\sec B\sin L\cdot X_o + \sec B\cos L\cdot Y_o - (1-e^2)\mathrm{tg}\,B\cos L$$

$$\cdot\theta_x - (1-e^2)\mathrm{tg}\,B\sin L\cdot\theta_y + \theta_z \tag{8-18}$$

如果顾及地面网的尺度因子 m_T 和定向误差 dA，上式应扩充为

$$B_S - B_T = \frac{1}{M+H}(-\sin B\cos L\cdot X_o - \sin B\sin L\cdot Y_o + \cos B\cdot Z_o$$

$$-\frac{(2-\alpha)\cdot\alpha}{M+H}\cdot N\cos B\sin B\cdot m_S + (1+e^2\cos^2 B)\sin L\cdot\theta_x$$

$$-(1+e^2\cos^2 B)\cos L\cdot\theta_y + \frac{N}{M+H}e^2\sin B\cos B\cdot\frac{da}{a}$$

$$+\frac{M}{M+H}(2-e^2\sin^2 B)\sin B\cos B\frac{d\alpha}{1-\alpha}$$

$$+[\Delta B + \frac{3}{2}\mathrm{tg}\,B_o\eta_o^2\Delta B^2 - \frac{1}{2}\cos B_o\sin B_o(1+\eta_o^2)l^2$$

$$-\frac{1}{3}\cos^2 B_o\cdot\Delta B l^2]\cdot m_T + [-\cos B_o(1+\eta_o^2)l + 3\sin B_o\eta_o^2\Delta B l$$

$$+\frac{1}{6}\cos B_o l^3]\cdot dA$$

$$L_S-L_T=\frac{1}{N+H}(-\sec B\sin L\cdot X_o+\sec B\cos L\cdot Y_o$$
$$-(1-e^2)\,\mathrm{tg}\,B\cos L\cdot\theta_x-(1-e^2)\,\mathrm{tg}\,B\sin L\cdot\theta_y+\theta_z$$
$$+[l+\mathrm{tg}\,B_o(1-\eta_0^2)\Delta Bl+\frac{1}{3}(2+3\,\mathrm{tg}^2 B_o)\cdot\Delta B^2\cdot l$$
$$-\frac{1}{6}\sin^2 B_o l^3]\cdot m_T+[\sec B_o(1-\eta_0^2+\eta_0^4)\Delta B$$
$$+\sec B_o\,\mathrm{tg}\,B_o(1-\frac{\eta_0^2}{2})\Delta B^2-\frac{1}{2}\sin B_o l^2$$
$$+\frac{1}{3}\sec B_o(1+3\,\mathrm{tg}^2 B_o)\Delta B^3-\frac{1}{2}\sec B_o\Delta Bl^2]\cdot dA \qquad (8\text{-}19)$$

式中 $\mathrm{tg}\,B_o$，$\sec B_o$，η_o 等符号中的下标"O"表示大地网的原点，而 $\Delta B=B_i-B_o$，$l=L_i-L_o$。

为了使转换模型简单，卫星网和地面网所用的椭球体最好相同，此时式中 $da=0$，$d\alpha=0$。我国用于空间技术的1980年地心坐标系和用于常规大地测量的1980年国家大地坐标系均采用同一椭球体，因而（8-18）和（8-19）式中的 da，$d\alpha$ 项就不存在。

我国的高程异常测定精度究竟如何，尚未见到确切的数据。一般认为误差估计有 3 m－5 m，在有些点上的高程异常与多普勒测定的结果相比，差异已大于 6 m－7 m。采用二维转换模型，可以避免高程异常的误差对转换参数的影响，但是这样做要丢失卫星测出的高程信息，使误差方程式的个数减少三分之一。因此，只有首先搞清我国天文大地网中大地高和平面位置的误差究竟是多少，并对二维转换模型和三维转换模型的利弊进行较为深入的分析研究（包括试算），才能决定采用那种转换模型最为有利。

§8.3 天文大地网实际精度的检核

一、利用两网转换模型检核天文大地网的实际精度

(1) 全网系统误差的检核

由于转换参数是在使两网中所有公共点的坐标残差 v 的加权平方和 $[pvv]$ 为最小的情况下求得的，因而只要这些公共点的位置分布和密度符合要求，求出的转换参数就能反映整个天文大地网的系统误差，以及参考椭球体的定位定向误差。其中，尺度因子 m 反映了整个天文大地网的"平均"长度变形，$(\alpha、\beta)$，$(\alpha、\mu、\nu)$ 等定向参数则反映整个天文大地网的方向扭曲，三个平移参数反映了参考椭球体的定位误差，而三个旋转参数则反映了参考椭球体的定向误差。由于我们是以卫星网为标准来检核天文大地网的，而卫星网本身也含有误差，因此上述各种误差都是相对于卫星网而言的。

(2) 偶然误差和局部性系统误差的检验

在不计卫星网误差的情况下，如果天文大地网没有局部性系统误差和偶然误差，那么全部公共点坐标经转换后就应和卫星网中对应点的坐标完全一致，没有残差。如果天文大地网中没有局部性系统误差而仅有全网统一的系统误差和偶然误差，那么经两网转换消除了系统性差异后，各公共点的残差也应表现出偶然误差特性，如果天文大地网中各局部区域有不同的系统误差，则经两网转换消除了平均系统误差后，残差在各局部地区仍会呈系统误差特性（如果这些系统误差不是小到完全被偶然误差所“掩盖”的话）。这样，我们就能从转换后公共点坐标残差 δX 来分析天文大地网的偶然误差和局部性系统误差。

前面讲过，我国天文大地网中各局部区域中，由于作业时间不同，作业方法的不同，所用仪器不同以及外界条件不同，很可能存在着局部性系统误差，因此在求得两网转换参数后，最好能对残差进行分析检验。

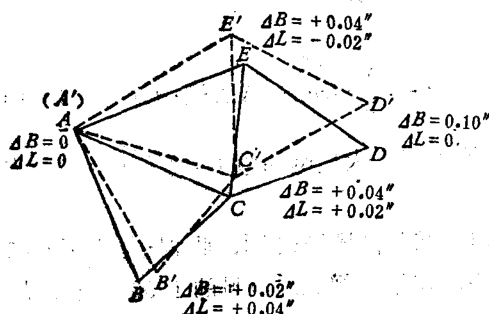


图 8-7

设在图 8-7中，实践表示地面网。虚线表示转换后的卫星网。显然经两网转换后图中这一局部区域还有系统性的方向扭曲。根据这些局部区域内公共点的坐标残差，可以求出各局部区域的转换参数。当然此时这些局部性系统误差仅仅反映了它们和全网“平均”的系统误差之间的差异。

综上所述，用卫星网检核天文大地网的实际精度，可分为三个步骤：

（a）利用卫星网和地面网的全部公共点求出转换参数，用以反映整个地面网的“平均”系统误差；

（b）对转换后的残差进行分析，以便了解各地区有无局部性系统误差（即各地区的局部系统误差和全网系统误差的异同），并根据残差求出反映局部系统误差的局部性转换参数；

（c）根据转换后的残差求偶然误差。对于没有局部性系统误差的地区可利用第一次转换（全网转换）后的残差来计算偶然误差，有局部性系统误差的地区则应利用第二次转换（局部区域转换）后的残差来求偶然误差。

二、利用两网对应点间的弦长之差和方位角之差研究地面网的系统误差。

由于地面网的系统误差主要表现为系统性的长度变形和方向扭曲，所以除了采用上述两网转换模型的方法外，还可根据两网中对应点间的弦长之差和方位角之差来分别研究地面网的长度变形和方向扭曲。

（1）利用弦长之差来确定地面网相对于卫星网的尺度因子

设地面网中测站 p_i、p_j 在参心空间直角坐标系中的坐标分别为$(X_i\ Y_i\ Z_i)_T$，$(X_j\ Y_j\ Z_j)_T$，两点间的弦长为 D_T，而卫星网中对应点间的弦长为 D_S，设

$$\overline{D}_T = D_T - dD_T$$

$$\overline{D}_S = D_S - dD_S$$

式中

$\overline{D}_T$为 $p_i \to p_j$在参心直角坐标系中弦长的真值；D_T为观测值，$\overline{D}_S$为 $p_i \to p_j$在地心直角坐标系中弦长的真值，D_S为观测值。

由于弦长与参考系的选择无关，所以 D_T应等于 D_S，根据式(8-4)，地面网和卫星网在空间直角坐标系中的尺度因子分别为

$$m_T = \frac{dD_T}{D_T}$$

$$m_S = \frac{dD_S}{D_S}$$

地面网相对于卫星网的尺度因子应为

$$m = m_T - m_S = \frac{dD_T}{D_T} - \frac{dD_S}{D_S}$$

$$\approx \frac{dD_T - dD_S}{D_T} = \frac{D_T - D_S}{D_T} \tag{8-20}$$

因此，不需进行坐标转换，即可利用两网的弦长之差求出地面网相对于卫星网的尺度因子。但是对于投影到椭球体面上的地面网，习惯上是把尺度因子 m_T定义为

$$m_T = dS/S \tag{8-21}$$

式中，S 为大地线的长度，dS 为大地线的长度变形。

当S不很长，而且大地高H也比较准确时，(8-4) 式定义的尺度因子和 (8-21) 式定义的尺度因子差别很小，两者可以认为一致。但是当大地高的精度不高时，用 (8-21) 式求得的相对尺度因子中包含着大地高误差的影响，具体表示式为

$$m = (m_T - m_S) + \frac{1}{2N_i}(dH_i + dH_j) \tag{8-22}$$

公式推导过程详见参考文献[7]。

利用两网中所有公共边的弦长之差，按式 (8-20) 可求得全网的尺度因子。如果网中存在着局部性的系统误差，也可采用上述方法求出各局部区域的尺度因子。

(2) 利用方位角之差确定地面网相对于卫星网的系统性方向扭曲。

如前所述，采用合适的方法进行坐标系转换后，两网中对应边的方位角应相等，因此我们可利用两网中对应边方位角之差来研究地面网相对于卫星网的系统性方向扭曲。

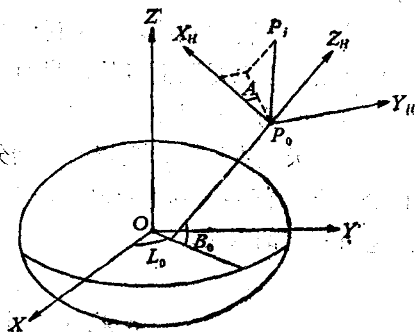


图 8-8

由于大地方位角的计算比较麻烦，我们改用弦线在站心坐标系中的坐标方位角来进行。在图 8-8 中，有

$$
\left.\begin{aligned}
A_T &= \operatorname{arc\,tg}\frac{Y_{HT}}{X_{HT}} \\
A_S &= \operatorname{arc\,tg}\frac{Y_{HS}}{X_{HS}}
\end{aligned}\right\} \tag{8-23}
$$

方位角之差

$$
dA = A_T - A_S \tag{8-24}
$$

对（8-23）式微分后，可得

$$
dA_T = \frac{X_{HT}dY_{HT} - Y_{HT}dX_{HT}}{X_{HT}^2}\cos^2 A_T = \frac{X_{HT}dY_{HT} - Y_{HT}dX_{HT}}{X_{HT}^2 + Y_{HT}^2}
$$

同理

$$
dA_S = \frac{X_{HS}dY_{HS} - Y_{HS}dX_{HS}}{X_{HS}^2 + Y_{HS}^2}
$$

代入（8-24）式，并令

$$
X_{HT} = X_{HS} = X_H
$$

$$
Y_{HT} = Y_{HS} = Y_H
$$

则

$$
dA = \frac{X_H dY - Y_H dX}{X_H^2 + Y_H^2} \tag{8-25}
$$

式中

$$
dX = \Delta X_{TOi} - \Delta X_{SOi}
$$

$$
dY = \Delta Y_{TOi} - \Delta Y_{SOi}
$$

利用式(8-23)、(8-24)或（8-25）求出方位角之差的公式，不仅可用于根据全网资料求整个网的“平均”方向扭曲，也可用于不同的地区有局部性方向扭曲时，分别求得各局部地区的方向扭曲。

最后需要再次指出，以上讨论是以卫星网为标准检核地面网，求得的地面网的系统误差都是相对于卫星网而言的，只有当卫星网的精度很高，或其系统误差已知，才能可靠地反映地面网的系统误差。

我国天文大地网精度较高，据分析认为，偶然误差占主导地位，而目前我国已测设的37个点的全国多普勒卫星网，由于种种原因，精度还不是很高，因而用它来检核天文大地网还有一定的困难。

§8.4　卫星网和地面网联合平差

一、改善和加强天文大地网的基本方法

目前，世界上已有好些国家和地区利用卫星多普勒观测成果来加强和改善天文大地网。虽然，从小范围讲多普勒观测的精度（特别是单点定位）不一定比常规大地测量高，

但是它求得的点位精度比较均匀，只要适当地选择卫星网点的间距，仍可获得较高的相对精度。天文大地网中边远地区点的坐标需经过许多三角形或导线点才能从大地原点传递过来，因而对于一个大规模的天文大地网而言，边远地区的误差会累积而达到相当大的数值，因此从整体上讲，卫星多普勒网有能力加强和改善大规模的天文大地网的精度。今后，由于GPS技术的广泛应用，卫星网就不但能控制和加强大规模的天文大地网，且也将能控制和加强小规模的天文大地网和工程控制网。

用卫星网加强和改善天文大地网可以采取两种办法。一是在天文大地网中以适当的密度。例如每隔200km左右，在锁段两端的拉普拉斯点上，加测精确的卫星定位点，用卫星测出的数据作为已知数据参加平差，以控制天文大地网中坐标误差的累积。这种方法计算简便，对改善规模较大的天文大地网的精度效果显著，但在目前，卫星多普勒定位的精度只能达到0.5m～1m左右的情况下，只有在地面网的精度较差时才适用。

另一种办法则是将卫星网和天文大地网联合平差，同时求出两网的转换参数。在卫星网的精度和地面网的精度大致相当的情况下，采用联合平差的办法来改善大地网的精度比较合理可行。

为了上述目的还要讨论的一个问题是，卫星网中点位分布以多大间距最为适宜。为了解决这个问题，国外曾在一个包含838个一等点，由22个锁环构成的试验网中用7种不同方案进行了试算，试算时地面网的方向观测中误差取为±0.385″，卫星多普勒点的点位中误差取纬度方向±0.03″，经度方向±0.04″。试算结果表明，多普勒网的间距为250km时最为有利，这个结论已被广泛使用。参考文献[6]又进一步从理论上对最优间距进行了研究，将该试验网中250km的最优间距从理论上作了解释，并提出最优间距取决于多普勒定位精度和地面网本身精度，多普勒边长的相对精度应等于地面网中具有同样长度边长的相对精度，因而最优间距250km并不是普遍的结论，如果取我国地面网的相对精度为1/135000，则参与地面网联合平差的多普勒点的最优间距应如表8-4所示。

表 8-4

多普勒定位精度(一个坐标分量)(m)	1	1.5	2	2.5	3
多普勒点的最优间距（km）	270	405	540	675	810

二、卫星网和地面网的联合平差

联合平差的主要目的是为了检核和改善天文大地网的精度，并求得较为准确的两网转换参数，因此考虑平差方案时要围绕这个目的，同时也必须充分顾及两网各自的特点和实际情况。

将两网的观测值分别给以适当的权，进行联合平差，在理论上固然是严密的，但是由于两网往往并不是同时完成的，而且起初布网测算时又常需首先满足各自的任务而各自单独平差过，所以实际上联合平差是利用两网各自平差的结果来进行的。下面简单介绍几种典型的平差方法。

1．按整体平差原理导出的联合平差

为了比较各种方法，首先讨论整体平差的形式和精度。

（1）误差方程和法方程

设 $\boldsymbol{L}_1$，$\boldsymbol{L}_2$分别为地面网和卫星网的观测向量。$\boldsymbol{X}_1$为地面网中公共点的坐标未知数，$\boldsymbol{Z}_1$为其余点未知数。$\boldsymbol{X}_2$为卫星网中公共点的地心坐标未知数，$\boldsymbol{Z}_2$为其余点未知数。$\boldsymbol{Y}$ 为两网的转换参数。则整体平差时观测方程可写为

$$\left.\begin{aligned} &E(\boldsymbol{L}_1)=f_1(\boldsymbol{X}_1,\ \boldsymbol{Z}_1)\\ &E(\boldsymbol{L}_2)=f_2(\boldsymbol{X}_2,\ \boldsymbol{Z}_2)\\ &\boldsymbol{X}_2=f_3(\boldsymbol{X},\ \overline{\boldsymbol{Y}}) \end{aligned}\right\} \tag{8-26}$$

线性化后可得

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{V}_1&=\boldsymbol{C}_1\hat{\boldsymbol{z}}_1+A_1\hat{\boldsymbol{x}}_1-\boldsymbol{l}_1\\ \boldsymbol{V}_2&=\boldsymbol{C}_2\hat{\boldsymbol{z}}_2+A_2\hat{\boldsymbol{x}}_2-\boldsymbol{l}_2\\ \hat{\boldsymbol{x}}_2&=A\hat{\boldsymbol{x}}_1+\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{y}}-\boldsymbol{W} \end{aligned}\right\} \tag{8-27}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{x}}_1=\boldsymbol{X}_1-\boldsymbol{X}_1^0;\ \hat{\boldsymbol{x}}_2=\boldsymbol{X}_2-\boldsymbol{X}_2^0;\ \hat{\boldsymbol{y}}=\overline{\boldsymbol{Y}}-\overline{\boldsymbol{Y}}^0;\\ &\hat{\boldsymbol{z}}_1=\boldsymbol{Z}_1-\boldsymbol{Z}_1^0;\ \ \hat{\boldsymbol{z}}_2=\boldsymbol{Z}_2-\boldsymbol{Z}_2^0;\\ &\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{L}_1-f_1(\boldsymbol{X}_1^0\ \boldsymbol{Z}_1^0);\\ &\boldsymbol{l}_2=\boldsymbol{L}_2-f_2(\boldsymbol{X}_2^0\ \boldsymbol{Z}_2^0);\\ &\boldsymbol{W}=\boldsymbol{X}_2^0-f_3(\boldsymbol{X}_1^0\ \boldsymbol{Y}^0) \end{aligned}\right\} \tag{8-28}$$

将（8-27）式中第三式代入第二式，并令$\overline{\boldsymbol{A}}_2=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{A}$，$\overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{B}$，$\overline{\boldsymbol{l}}_2=\boldsymbol{l}_2+\boldsymbol{AW}$；则有

$$\boldsymbol{V}_2=\boldsymbol{C}_2\hat{\boldsymbol{z}}_2+\overline{\boldsymbol{A}}_2\hat{\boldsymbol{x}}_1+\overline{\boldsymbol{B}}\hat{\boldsymbol{y}}-\overline{\boldsymbol{l}}_2 \tag{8-29}$$

将上式与（8-27）中第一式联立，组成整体平差的法方程式为

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{C}_1 & 0 & \boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}_1 & 0\\ 0 & \boldsymbol{C}_2^T\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{C}_2^T\boldsymbol{p}_2\overline{\boldsymbol{A}}_2 & \boldsymbol{C}_2^T\boldsymbol{p}_2\overline{\boldsymbol{B}}\\ \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{C}_1 & \overline{\boldsymbol{A}}_2^T\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{C}_2 & \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2^T\boldsymbol{p}_2\overline{\boldsymbol{A}}_2 & \overline{\boldsymbol{A}}_2^T\boldsymbol{p}_2\overline{\boldsymbol{B}}\\ 0 & \overline{\boldsymbol{B}}^T\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{C}_2 & \overline{\boldsymbol{B}}^T\boldsymbol{p}_2\overline{\boldsymbol{A}}_2 & \overline{\boldsymbol{B}}^T\boldsymbol{p}_2\overline{\boldsymbol{B}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\hat{\boldsymbol{z}}_1\\ \hat{\boldsymbol{z}}_2\\ \hat{\boldsymbol{x}}_1\\ \hat{\boldsymbol{y}}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{C}_1^T\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{l}_1\\ \boldsymbol{C}_2^T\boldsymbol{p}_2\overline{\boldsymbol{l}}_2\\ \boldsymbol{A}_1^T\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{l}_1+\overline{\boldsymbol{A}}_2^T\boldsymbol{p}_2\overline{\boldsymbol{l}}_2\\ \overline{\boldsymbol{B}}^T\boldsymbol{p}_2\overline{\boldsymbol{l}}_2\end{vmatrix} \tag{8-30}$$

其中 $\boldsymbol{p}_1$、$\boldsymbol{p}_2$分别为$\boldsymbol{L}_1$ 、$\boldsymbol{L}_2$的权矩阵。将$\hat{\boldsymbol{z}}_1$、$\hat{\boldsymbol{z}}_2$表示为$\hat{\boldsymbol{x}}_1$、$\hat{\boldsymbol{y}}$的函数为：

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{z}_1 &= (C_1^T p_1 C_1)^{-1} C_1^T p_1 l_1 - (C_1^T p_1 C_1)^{-1} \times C_1^T p_1 A_1 \hat{x}_1 \\
\hat{z}_2 &= (C_2^T p_2 C_2)^{-1} C_2^T p_2 \bar{l}_2 - (C_2^T p_2 C_2)^{-1} \\
&\quad \times C_2^T p_2 \bar{A}_2 \hat{x}_1 - (C_2^T p_2 C_2)^{-1} C_1^T p_2 \bar{B} \hat{y}
\end{aligned}\right\} \tag{8-31}
$$

代入（8-30）式，并令

$$
\left.\begin{aligned}
N_{11} &= A_1^T p_1 A_1 - A_1^T p_1 C_1 (C_1^T p_1 C_1)^{-1} C_1^T p_1 A_1 \\
W_1 &= A_1^T p_1 l_1 - A_1^T p_1 C_1 (C_1^T p_1 C_1)^{-1} C_1^T p_1 l_1 \\
N_{22} &= \bar{A}_2^T p_2 \bar{A}_2 - \bar{A}_2^T p_2 C_2 (C_2^T p_2 C_2)^{-1} C_2^T p_2 \bar{A}_2 \\
W_2 &= \bar{A}_2^T p_2 \bar{l}_2 - \bar{A}_2^T p_2 C_2 (C_2^T p_2 C_2)^{-1} C_2^T p_2 \bar{l}_2
\end{aligned}\right\} \tag{8-32}
$$

即可求出消去$\hat{z}_1$，$\hat{z}_2$后的约化法方程式为

$$
\begin{aligned}
&(N_{11} + A^T N_{22} A) \hat{x}_1 + A^T N_{22} B \hat{y} \\
&= (W_1 + A^T W_2 + A^T N_{22} W) \times B^T N_{22} A \hat{x}_1 + B^T N_{22} B \hat{y} \\
&= B^T (W_2 + N_{22} W)
\end{aligned} \tag{8-33}
$$

很明显，（8-32）式中的N_{11}和N_{22}分别为地面网和卫星网单独平差时消去非公共点未知数后的约化法方程阵，W_1，W_2则为相应的约化后的常数项向量，解（8-33）式可得

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= (N_{11} + A^T N_{22} A)^{-1} [-A^T N_{22} B \hat{y} + (W_1 + A^T W_2 + A^T N_{22} W)] \\
\hat{y} &= \{B^T N_{22} B - B^T N_{22} A (N_{11} + A^T N_{22} A)^{-1} \times A^T N_{22} B\}^{-1} \\
&\quad \cdot \{B^T (W_2 + N_{22} W) - B^T N_{22} A (N_{11} + A^T N_{22} A)^{-1} \\
&\quad \times (W_1 + A^T W_2 + A^T N_{22} W)\}
\end{aligned}\right\} \tag{8-34}
$$

利用矩阵反演公式，可写为

$$
\left.\begin{aligned}
\hat{y} &= \{B^T (N_{22}^{-1} + A N_{11}^{-1} A^T)^{-1} B\}^{-1} B^T \\
&\quad \times (N_{22}^{-1} + A_{22} N_{11}^{-1} A^T)^{-1} (-A N_{11}^{-1} W_1 + N_{22}^{-1} W_2 + W) \\
\hat{x}_1 &= N_{11}^{-1} W_1 + N_{11}^{-1} A^T (A N_{11}^{-1} A^T + N_{22}^{-1})^{-1} \\
&\quad \times (-A N_{11}^{-1} W_1 + N_{22}^{-1} W_2 + W - B \hat{y})
\end{aligned}\right\} \tag{8-35}
$$

求出$\hat{x}_1$和$\hat{y}$后，代入（8-31）式即可求得$\hat{z}_1$，$\hat{z}_2$，其中地面网非公共点未知数$\hat{z}_1$为

$$
\begin{aligned}
\hat{z}_1 &= (C_1^T p_1 C_1)^{-1} \{C_1^T p_1 l_1 - C_1^T p_1 A_1 \times [N_{11}^{-1} W_1 - N_{11}^{-1} A^T \\
&\quad \times (N_{22}^{-1} + A N_{11}^{-1} A^T)^{-1} \times (A N_{11}^{-1} W_1 + N_{22}^{-1} W_2 - W - B \hat{y})]\}
\end{aligned}
$$

展开后为

$$
\begin{aligned}
\hat{z}_1 &= (C_1^T p_1 C_1)^{-1} C_1^T p_1 l_1 - (C_1^T p_1 C_1)^{-1} \\
&\quad \times C_1^T p_1 A_1 N_{11}^{-1} W_1 + (C_1^T p_1 C_1)^{-1} C_1^T p_1 A_1 N_{11}^{-1} A^T \\
&\quad \times (N_{11}^{-1} + A N_{11}^{-1} A^T)^{-1} \times (A N_{11}^{-1} W_1 - N_{11}^{-1} W_2 - W - B \hat{y})
\end{aligned} \tag{8-36}
$$

（8-35），（8-36）式就是按整体平差原理进行联合平差时求未知数的公式。

（2）精度估算

将整体平差时的误差方程式写为

$$V = M\hat{X} - l \tag{8-37}$$

式中

$$V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & A_1 & 0 \\ 0 & C_2 & \overline{A}_2 & \overline{B} \end{pmatrix}$$

$$l = \begin{pmatrix} l_1 \\ \overline{l}_2 \end{pmatrix} \qquad p = \begin{pmatrix} p_1 & 0 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} = (\hat{z}_1^T, \hat{z}_2^T, \hat{x}_1^T, \hat{y}^T)^T$$

于是单位权方差为

$$\sigma_0^2 = \left(\frac{V^T pV}{n_1 + n_2 - t}\right) \tag{8-38}$$

式中 t 为未知数 z_1、z_2、x_1、y 的个数总和，而

$$V^T pV = l^T pl - l^T pM\hat{X} = l_1^T p_1 l_1 + \overline{l}_2^T p_2 \overline{l}_2 - l_1^T p_1 C_1 \hat{z}_1 - \overline{l}_2^T p \overline{A}_2 \hat{x}_1 - l_1^T p_1 A_1 \hat{X}_1 - \overline{l}_2^T p_2 \overline{B}\hat{y} \tag{8-39}$$

下面不加推导给出公共点未知数 $\hat{x}_1$和转换参数的权逆阵为

$$Q_{\hat{y}} = \{B^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1}B\}^{-1} \tag{8-40}$$

$$Q_{\hat{x}_1} = N_{11}^{-1} - N_{11}^{-1}A^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1} \times \{E - BQ_{\hat{y}}B^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1}\}AN_{11}^{-1} \tag{8-41}$$

2. 按相关平差原理进行联合平差

实际上联合平差是在两网各自平差的基础上进行的，为了充分利用已有结果，可根据相关平差原理，求得联合平差分阶段的平差公式。

由（8-27）式第一式组成地面网法方程，消去$\hat{z}_1$后得

$$N_{11}\tilde{x}_1 = W_1 \tag{8-42}$$

由（8-27）式第二式组成卫星网法方程，消去$\hat{z}_2$后得

$$N_{22}\tilde{x}_2 = W_2 \tag{8-43}$$

其中N_{11}，N_{22}，W_1，W_2可由（8-32）式确定。显然$\hat{X}_1$，$\hat{X}_2$的权阵$p_{\tilde{x}_1}$，$p_{\tilde{x}_2}$为N_{11}，N_{22}。分别平差后，$X_2 = f_3(X_1, Y)$可在平差值$\tilde{X}_1 = X_1^0 + \tilde{x}_1$，$X_2 = X_2^0 + \tilde{x}_2$及$Y^0$处线性化。即

$$V_{\tilde{x}_2} = Adx_1 + B\hat{y} - l \tag{8-44}$$

其中

$$\begin{aligned} l &= \tilde{X}_2 - f(\tilde{X}_1, Y^0) \\ &= X_2^0 + \tilde{x}_2 - A\tilde{x}_1 - f_3(X_1^0\ Y^0) \\ &= N_{22}^{-1}W_2 - AN_{11}^{-1}W_1 + W \end{aligned} \tag{8-45}$$

把$\tilde{x}_1$，$\tilde{x}_2$当作权阵为N_{11}，N_{22}的相关观测值$L_{\tilde{x}_1}$，$L_{\tilde{x}_2}$，则误差方程式为

$$\left.\begin{aligned} V_{\tilde{x}_1} &= dx_1 \\ V_{\tilde{x}_2} &= Adx_1 + B\hat{y} - l \end{aligned}\right\} \tag{8-46}$$

按相关最小二乘原理组成法方程式，即

$$\left.\begin{aligned}(N_{11}+A^TN_{22}A)dx_1+A^TN_{22}B\hat{y}&=A^TN_{22}l\\B^TN_{22}A\qquad dx_1+B^TN_{22}B\hat{y}&=B^TN_{22}l\end{aligned}\right\}\tag{8-47}$$

解之可得

$$\begin{aligned}dx_1&=(N_{11}+A^TN_{22}A)^{-1}(A^TN_{22}l-A^TN_{22}B\hat{y})\\&=(N_{11}+A^TN_{22}A)^{-1}A^TN_{22}(l-B\hat{y})\\\hat{y}&=[B^TN_{22}B-B^TN_{22}A(N_{11}+A^TN_{22}A)^{-1}A^TN_{22}B]^{-1}\\&\quad\times[B^TN_{22}-B^TN_{22}A(N_{11}+A^TN_{22}A)^{-1}A^TN_{22}]l\end{aligned}$$

利用矩阵反演公式，上式可简化为

$$\left.\begin{aligned}dx_1&=N_{11}^{-1}A^T(N_{22}^{-1}+AN_{11}^{-1}A^T)^{-1}(l-B\hat{y})\\\hat{y}&=\{B^T(N_{22}^{-1}+AN_{22}^{-1}A^T)^{-1}B\}B^T(N_{22}^{-1}+AN_{11}A^T)^{-1}l\end{aligned}\right\}\tag{8-48}$$

而

$$\begin{aligned}\hat{x}_1&=\tilde{x}_1+dx_1\\&=N_{11}^{-1}W_1+N_{11}^{-1}A^T(N_{22}^{-1}+AN_{11}^{-1}A^T)^{-1}(l-B\hat{y})\end{aligned}\tag{8-49}$$

与整体平差比较，结果完全一致。

3．按最小二乘法配置原理进行联合平差

设卫星网的地心直角坐标与地面网的大地坐标间的关系为

$$X_2=f(X,\ Y)\tag{8-50}$$

在 $(X_1^0,\ Y^0)$ 处线性化，得

$$\tilde{X}_2-\Delta=Ax_1+By+f(X_1^0,\ Y^0)$$

式中 $\tilde{X}_2$是卫星网单独平差后的地心坐标，$\tilde{X}_2=X_2^0+\tilde{x}_2$，令

$$l_{x_2}=\tilde{X}_2-f(X_1^0,\ Y^0)$$

于是有

$$l_{x_2}=Ax_1+By+\Delta\tag{8-51}$$

这就是配置问题中的观测方程。其中，x_1是有先验特性的随机参数，称为信号，其先验期望即地面网单独平差时公共点大地坐标平差值$\tilde{x}_1$，而$\tilde{x}_1=N_{11}^{-1}W_1$，先验方差为$D_{x_1}=\sigma_0^2N_{11}^{-1}=N_{11}^{-1}$，而$y$是不具有先验特性的非随机参数，$l_{x_2}$是观测向量，其噪声$\Delta$的期望为零，方差为$D_\Delta=E(\Delta\Delta^T)=\sigma_0^2N_{22}^{-1}=N_{22}^{-1}$，对于地面网非公共点未知数$z_1$，没有相应的观测向量$l_{x_2}$，可作为未测点信号予以推估，其先验特性为

$$\left.\begin{aligned}\tilde{z}_1&=(C_1^Tp_1C_1)^{-1}[C_1^Tp_1l_1-C_1^Tp_1A_1\tilde{x}_1]\\D_{\tilde{z}_1}&=(C_1^Tp_1C_1-C_1^Tp_1A_1(C_1^Tp_1C_1)^{-1}A_1^Tp_1C_1)^{-1}\\D_{\tilde{z}_1\tilde{x}_1}&=-(C_1^Tp_1C_1)^{-1}C_1^Tp_1A_1N_{11}^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{8-52}$$

它们均可从地面网单独平差的结果中获得。按广义最小二乘原理推求信号和转换参数的最佳估值公式为

$$\left.\begin{aligned}
\hat{X}_1 &= \tilde{X}_1 + N_{11}^{-1}A^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1}(l_{x_2} - A\tilde{X} - B\hat{y}) \\
\hat{y} &= \{B^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1}B\}^{-1}B^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1} \\
&\quad \cdot (l_{x_2} - A\tilde{x}_1) \\
\hat{z}_1 &= \tilde{z}_1 + D_{\tilde{z}_1\tilde{x}_1}A^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1}(l_{x_2} - A\tilde{x}_1 - B\hat{y})
\end{aligned}\right\} \tag{8-53}$$

将（8-52）式的第一，三式及

$$\begin{aligned}
l_{x_2} - A\tilde{x}_1 &= X_2^0 + \tilde{x}_2 - f(X_2^0, Y^0) - A\tilde{X}_1 \\
&= N_{22}^{-1}W_2 - AN_{11}^{-1}W_1 + W
\end{aligned}$$

代入（8-53）式第三式，得

$$\begin{aligned}
\hat{z}_1 = &(C_1^Tp_1C_1)^{-1}C_1^Tp_1l_1 + (C_1^Tp_1C_1)^{-1}C_1^Tp_1A_1N_{11}^{-1}W_1 \\
&- (C_1^Tp_1C_1)^{-1}C_1^Tp_1A_1N_{11}^{-1}A^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1} \\
&\times (W + N_{22}^{-1}W_2 - AN_{11}^{-1}W_1 - B\hat{y})
\end{aligned} \tag{8-54}$$

式（8-53）及（8-54）就是按配置法进行联合平差求参数最佳估值的公式。而精度估算公式可直接写出

$$\left.\begin{aligned}
Q_{\hat{y}} &= \{B^T(AN_{11}^{-1}A^T + N_{22}^{-1})^{-1}B\}^{-1} \\
Q_{\hat{x}_1} &= N_{11}^{-1} - N_{11}^{-1}A^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1} \\
&\quad \times [E - BQ_{\hat{y}}B^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1}]AN_{11}^{-1} \\
Q_{\hat{z}_1} &= D_{\tilde{z}_1} - D_{\tilde{z}_1\tilde{x}_1}A^T(AN_{11}^{-1}A^T + N_{22}^{-1})^{-1} \\
&\quad \times [E - BQ_{\hat{y}}B^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1}]AD_{\tilde{x}_1\tilde{z}_1} \\
Q_{\hat{x}_1\hat{y}} &= -N_{11}^{-1}A^T(N_{22}^{-1} + AN_{11}^{-1}A^T)^{-1}BQ_{\hat{y}}
\end{aligned}\right\} \tag{8-55}$$

将（8-53）～（8-55）式和整体平差及相关平差结果进行比较，可以发现，三者求参数及精度估算的最终形式完全是一致的，因而理论上这三种方法是等价的。配置法的优点是允许卫星网和地面网可以分别采用不同的坐标单独平差，避免了繁琐的权阵或法方程阵的坐标转换。当卫星网和地面网单独平差时，输出 N_{11}^{-1} 和 N_{22}^{-1}，配置法比相关平差可以少求两个大型矩阵的逆。

联合平差还涉及许多具体问题，其中许多问题尚在讨论中，此处不再一一介绍。

第九章 GPS 卫星定位方法

§9.1 概　　述

全球定位系统 GPS (Global Positioning System)* 是美国研制的新一代卫星导航系统。它可以向全球数目不限的用户连续地提供高精度的全天候三维坐标、三维速度以及时间信息。由于它具有极高的应用价值，因而得到了美国政府和三军的高度重视，被列为重点空间计划之一。目前全球定位系统虽然尚未正式投入运行，但试验系统已可为包括我国在内的全球相当大的地区提供每天约 4 ～ 6 小时的服务时间。预计在 1991 年可完成 21 颗 GPS 工作卫星的发射，在全球形成三维导航能力。

全球定位系统的出现，不仅使导航技术获得了根本性的进展，而且将对大地测量的发展产生深远影响。利用全球定位系统可以在很短的时间内以极高的精度进行精密大地定位，而且测站间不要求互相通视，因而将导致传统大地测量的布网方法、作业手段和内外业程序发生根本性的变革。这种高精度、高效率的定位方法还可能在工程测量、地震监测和地球动力学等领域得到广泛的应用，从而引起测量界的广泛兴趣和普遍关注。

经过十多年的努力，利用 GPS 进行精密定位已取得了巨大的进展。目前利用载波相位测量技术对试验卫星进行二小时左右的观测，在数百米至数公里的短基线上已可获得毫米级的相对定位精度。在数公里至数十公里的基线上已可获得 1～2ppm 的相对定位精度。因而目前 GPS 定位技术已完全有能力进行传统的一、二、三、四等大地测量和工程控制测量。采用轨道改进模型后，在中长基线上目前已可获得 0.1ppm 的相对定位精度。采取适当措施(采用双频接收机、原子钟、水汽辐射计等)，并采用动力法模型同时测定卫星轨道和测站坐标后，在更长的基线上可望达到厘米级的相对定位精度，从而使 GPS 观测成为一种既灵活方便又具有很高精度的一种空间大地测量手段。

9.1.1 子午卫星系统的局限性

子午卫星系统是美国最早研制出来可供民用的卫星系统，具有观测和数据处理自动化程度高，工作可靠，故障率极低，接收机轻便且价格适宜，以及可进行全球全天候导航等优点而被广泛用于导航和定位。1986 年底，全球子午卫星接收机总数已达八万台左右，其中约 90% 是单频接收机。

二十年来大地测量工作者在利用子午卫星进行卫星大地测量方面也取得了不少成就。定位精度已从开始时的 100m 提高到 1972 年的 1m 左右。1972 年以来在全球各大陆和许

---

* 也称为“授时测距导航卫星系统”(the Navigation Satellite Timing and Range System)，缩写为导航星 NAVSTAR。

多海岛上已测定了成千上万个多普勒点。在建立统一的地心坐标系，测定地球重力场和极移，建立和检核天文大地网等方面都发挥了巨大作用。

但是子午卫星系统也有一定的局限性，主要是：

（1）不能连续导航，难以满足高动态载体的导航定位要求。因为子午卫星系统的卫星数目少，用同一接收机观测连续两次子午卫星通过，至少要相隔1.5小时（卫星绕地一周的时间），若观测时机不好，上一次通过被观测的卫星绕地一周后可能已不位于测站上空（测站随地球自转而东移），要等另一个子午卫星飞临才能观测第二次通过，这就要等待更长的时间。虽然也可能遇到另一个卫星随即就来临的情况，但因星少而机会不多。此外，用子午卫星导航每次只能测一个星，而该星一次通过需10～20分钟的观测时间才有一个定位结果，在此期间动态载体会有一段位移且不易准确计算其大小和方向。若需测多次通过计算结果，则更为麻烦。

（2）静态定位精度不能满足短距离高精度的测量任务要求，因而难以用于城市测量、工程测量、地震监测等方面的任务。

子午卫星系统静态定位精度受到限制的原因首先是该系统中的振荡器稳定度还不够高，由此而引起的定位位置误差要用几十次甚至上百次卫星通过，才能减小到分米左右。其次是子午卫星离地球较近，受重力场异常及大气阻力的影响较为显著，地面跟踪站测定卫星轨道时，由于使用的重力场模型的误差、跟踪站坐标的误差、以及计算大气阻力摄动的误差，都会使定轨精度受到影响，因此卫星轨道位置的误差对单站定位成果有直接影响，对联测定位和短弧平差成果可大部分抵消，但仍有残留误差。这些误差中的偶然误差部分也要观测上百次卫星通过才能削弱到分米左右。再次是对观测值进行电离层折射改正时只计算了一阶改正而舍去了高阶改正，其影响对于地磁赤道附近地区的测站来说会使其高程产生大于1m的误差。

当然，以上所讲的有关子午卫星系统的局限性是相对于更为优越的GPS卫星系统而言的。但因GPS卫星系统目前仍处于试验阶段，1989年1月才发射第一个正式工作卫星，全部发射完（18＋3）个工作卫星形成完全星座并正式运转，要到九十年代中期，所以就全球用户数量来说，子午卫星的用户要多得多。这些用户投资购买了接收设备，培训了技术人员，已经适应用这种技术为他们的业务工作服务，只要精度能满足各自的要求就不愿重新投资更换新技术，何况GPS卫星系统的优越性要在正式运转后才能充分发挥，而子午卫星还库存有十余个（1989年又发射了一个OSCAR卫星），因此对于在GPS卫星系统完成后要关闭子午卫星系统的说法，即使在美国也有阻力。可能的结局是，交由民间出钱维护和管理并继续使用。

9.1.2 全球定位系统的主要特点及用途

一、全球定位系统作为一种导航和定位系统具有下列主要特点：

（1）全球连续覆盖。地球上任何地方的用户在任何时间至少可以同时观测到四颗GPS卫星，因而该系统可为全球任何地点及近地空间的用户提供每天24小时的连续导航定位服务。

（2）具有高精度三维定位测速及定时的功能。该系统能连续地为各类用户提供三维坐标、三维速度和时间信息。利用*P*码一次定位的精度约为10m左右，测速精度可达0.1m/s，校时精度可达10ns(相对于GPS标准时间)，而相对于协调时的精度可达1μs，将来可达0.1μs。

（3）快速定位。由于接收机可利用多个通道同时对多个卫星进行观测，因而一次定位只需要几秒钟至几十秒钟。既可用于高动态用户的导航定位，也可大大提高低动态用户和静态用户的工作效率。

（4）由于采用了伪随机噪声码技术，因而GPS的导航信号具有抗干扰能力强保密性能好等特点。

（5）被动式全天候导航。用户只需装备接收机就可以接收信号进行导航，而无需发射任何信号，因而隐蔽性能好，不易被敌方发现(这对军事用户是十分重要的)。在各种气候条件下均可进行导航定位，用户的数目不受限制。

（6）通用全球导航系统。由于全球定位系统可以向全球任何地点和近地空间的用户独立提供连续的高精度的导航信息，因而有可能克服其它各种导航系统的局限性而成为通用的导航系统。

二、全球定位系统的广泛用途

1．导航。利用全球定位系统可以为陆地海洋和空中的各种交通运输工具进行导航。利用GPS可以为各种海船和飞机进行途中导航，据报道一艘大型油轮横渡大西洋一次就可节省17000美元的费用。利用相对定位方式还可为船舶的进港及在江河中航行进行导航。在洲际导弹上装上GPS接收机后，就能实时确定飞行轨迹进行制导以提高命中率。在导弹试验中则可用无线电发射机将GPS的实测数据送回地面，以研究大气阻力和地球重力场对导弹弹道的影响，改进制导系统。利用GPS还可为卫星定轨，例如在Landsat-4卫星上安装的GPS接收机表明：不用地面跟踪系统，卫星的定轨精度可达10m左右。若采用相对定位方式，定轨精度还可能大大提高。目前一些厂商已在研制把小型廉价的GPS接收机和屏幕显示数字化地图技术相结合，以便为汽车等地面交通工具导航，它们有可能成为全球定位系统中数量最大的用户。

2．授时。利用GPS可进行高精度授时，用户可获得精度为10ns的时钟改正数（相对于GPS标准时），相对于UTC的精度也可达0.1～1μs。因而GPS将成为最方便最精确的授时方法之一。

3．高精度高效率的地面测量。全球定位系统不仅使导航技术获得了根本性的进展，而且在发展精密定位能力以满足大地测量、工程测量、地震监测和地球动力学的需要方面也取得了令人鼓舞的成就。

（1）利用GPS进行精密大地定位。

和其它大地定位技术相比，利用全球定位系统进行大地定位无论在精度上还是在费用上都更为有利。当测站间的间距小于500km时，对GPS卫星进行1小时左右的观测，利用干涉测量技术和载波相位测量技术可获得几厘米到几分米的相对定位精度。

在比较各种大地定位技术时，除了精度指标外，还必须同时考虑作业的方便程度，效

率（时间）和效益（经济）等因素。与常规大地测量技术相比，利用GPS进行大地定位时由于无需保持测站间的相互通视，因而可避免建造觇标和清除视线上的障碍等花钱费时的工作，而且再也不必为了保持通视而把控制点放在那些难以攀登的高山之顶，从而大大改善野外作业条件。由于可以对GPS卫星进行全天候的观测，不必象进行常规大地测量那样选择最有利的观测时间，因而可大大提高作业效率，节省大量的时间。此外利用GPS进行大地定位可同时获得测站的三维坐标，无需象常规大地测量那样分别布设平面控制网和高程控制网。

以类星体作为射电源的甚长基线干涉测量和对卫星进行激光测距虽然可以达到很高的精度，但仪器笨重，设备昂贵，即使是小型流动站也必须安装在专用卡车上，需有公路供其出入。而GPS接收机则可以由测量人员随身携带，可以在离开公路的点上设站，仪器价格也便宜得多，作业效率也高得多，因而更适宜于在大地测量中推广使用。

子午卫星的接收机在大小和价格方面都和GPS接收机相仿，但子午卫星多普勒定位目前只能获得几个分米至1m的相对定位精度（采用联测定位或短弧平差法），而且为了获得这一精度通常需要在一个测站上观测几天。GPS定位不但在精度上可提高一个数量级，而且仅需观测几个小时。由于作业效率高，不但可以减少费用，赢得时间，而且也使外业工作更为方便。

综上所述，从定位精度，定位所需的时间和费用，以及作业的方便程度等方面，与其它大地定位方法进行综合比较，可以看出GPS定位技术是一种较好的定位方法。

（2）在大地测量中的应用

GPS在大地测量方面的应用大体可分为两个方面：

（*a*）代替常规方法直接测定各级大地点的坐标。全球定位系统虽然尚未正式开始全面工作，但利用各厂商生产的GPS接收机（即使是单频接收机，如Macrompter V-1000，WM101等）和目前的GPS试验系统，测定基线向量已可获1～2ppm的精度。GPS定位不但速度快而且不要求测站间相互通视。利用6颗试验卫星，在美国每天可以测定1～2个一等大地点或3～4个二等大地点。

（*b*）布设GPS零级网以加强和检核天文大地网的精度。在全国以较远的间距（例如每隔200km左右，在一等三角锁两端的拉普拉斯点上）布设一个高精度的GPS网，利用目前GPS载波相位测量技术或干涉测量技术能以几个厘米至1分米的精度来测定这些基线向量。这个高精度的GPS零级网在加强天文大地网的精度方面将会起显著作用，它可以对天文大地网的实际精度进行检核，求出网中可能存在的系统误差。为此目的而建立的卫星多普勒网，由于精度的限制，未能圆满地完成任务，因而这一任务就将用建立GPS网来完成。

（3）在工程测量方面的应用

在某些工程测量项目中，所需的精度很高，边长通常较短，且测站间不易保持相互通视。在这种情况下，利用GPS进行相对定位是一种相当有效的方法。当测站间隔为几公里时，利用单频接收机观测几个小时后，就可获得毫米级的精度。

随着GPS系统的正式运行，接收机的大批量生产以及各厂商间的相互竞争，仪器价

格也将会有较大的下跌。估计在不久的将来，GPS 接收机无论在大小、重量和价格上都可以和其它工程测量仪器展开竞争，从而在工程测量领域内得到广泛的应用。

（4）在地球动力学及土地管理测量方面的应用

采取适当的措施（如采用双频接收机以较好地消除电离层折射的影响，采用水汽辐射计以较好地消除对流层改正中湿分量的影响，采用原子钟作为接收机的频标以提高振荡器的稳定度等），并采用动力法模型同时确定 GPS 卫星的轨道和测站坐标后，有可能以厘米级的精度来测定长达几千公里的基线向量(即 10^{-8}级的相对精度)，从而获得能用于地球动力学研究的十分有意义的结果，使之在测定极移和板块运动时能够发挥作用。

在土地管理和地籍测量中，GPS 定位技术也能得到广泛应用。例如在确定土地边界的地籍测量任务中，一般规定测量误差在市中心区为 5cm，在市郊区为 10 cm，用传统测量方法常因解决通视问题增加工作量或延误工期，而采用 GPS 方法则能又快又好地完成任务。

§ 9.2 全球定位系统的构成

全球定位系统是由美国国防部批准，由陆海空三军联合研制的。运输部，国防制图局等国内其它部门以及北大西洋公约的成员国等其它国家也共同参加了研制工作。整个研制过程大体上可分为三个阶段。第一个阶段为方案论证阶段，在此期间发射了许多试验卫星，建立了第一阶段地面控制部门并研制了接收机样机。在美国进行了数百次试验，对整个系统的导航能力，卫星的信号强度和原子钟在轨道上的工作状态等都进行了彻底的检核。第一阶段的工作已于 1979 年结束。第二阶段是大规模工程研制阶段，在该阶段内对试验卫星进行了全面检核和改进，并生产了正式的工作卫星，建立了地面工作控制系统，改进了接收机样机并批量生产了商品接收机。第三阶段是使全球定位系统正式投入全面工作的阶段。由于航天飞机“挑战者号”的失事使美国整个空间计划受挫，因而在 1988 年底使整个系统全面投入运行的原定计划可能要推迟到 1991 年才能实现。然而目前的试验卫星已可为全球相当大的地区提供每天约 4 ～ 5 小时的服务。随着工作卫星的发射，可供观测的时间将不断增多，卫星的分布也将不断改善。以商品型接收机的出现为标志，全球定位系统已开始进入实用阶段。

全球定位系统的组成和子午卫星系统相似，整个系统由三个部分组成：空间部分、地面控制部分和用户装置部分。下面分别予以介绍。

9.2.1 空间部分（卫星）

目前的试验卫星在两个倾角为 63°，几乎为圆形的轨道上飞行。卫星离地面的高度为 20000km，运行周期为 12 小时（恒星时）。到目前为止，共发射了 11 颗试验卫星，其中 SV3，SV6，SV9，SV11，SV12,SV13，6 颗卫星目前仍在正常工作。SV7 发射失败未进入轨道，其余卫星则由于信号精度低或原子钟出现故障等原因而不能正常工作。

全球定位系统正式投入运行后，空间部分将由 18 颗工作卫星和 3 颗备用卫星组成。

备用卫星可以按照控制系统的命令飞行到指定位置以取代出现故障的卫星，这对于保证整个系统的高度有效性将具有十分重要的意义。

18颗卫星将分布在6个轨道平面上（参阅第二章图2-24），每个轨道平面上各有3颗卫星，均匀分布，彼此相距120°，各轨道平面彼此相差60°，轨道平面的倾角为55°，卫星将在高度为20200km的圆轨道上飞行，周期为12小时（恒星时）。相邻两个轨道平面上的卫星离开升交点的角距（$\omega+f$）互相差40°（其中ω为近地点角距，f为真近点角），这样安排的目的是为了保证在任一瞬间任一地点，至少有4颗卫星出现在用户的视场中。

GPS试验卫星重774kg（包括310kg燃料），主体呈柱形，直径为1.5m，两侧伸出两块双叶太阳能电池帆板，全长5.33m，总面积为5m^{2}左右。帆板能旋转，以便始终对准太阳。太阳能电池可给卫星上的蓄电池充电，以保证卫星进入地影后仍能正常工作。电池功率为410～580W，卫星底部装有多波束定向天线，这是一种由12个单元构成的螺旋天线阵。此外，在星体两侧装有全向遥控遥测天线，以接收地面站输入的信息。卫星上还装有发动机及喷管，最大推力为2935kg，总冲量为85850kg·s，用以使卫星从大椭圆转移轨道变换为20000km圆形轨道。卫星的设计寿命为5年，携带的燃料则至少可使用7年。每个工作卫星上将安排两台铷原子钟和两台铯原子钟，其稳定度为1×10^{-13}，原子钟将发出10.23MHz的标准频率。目前海军实验室正在研制卫星用的小型氢原子钟，以后有可能在GPS卫星上安装这种更为精确的氢原子钟。GPS卫星上还有导航电文存贮器和L波段双频发射机，用以存贮导航电文，发射信号。试验卫星是用宇宙神—F-SVS火箭发射的，而工作卫星则准备用航天飞机发射。

9.2.2 地面控制部分

地面控制部分一般包括以下四个部分：

一、主控站

主控站负责管理和协调整个地面控制系统的工作。其主要职能是根据各监测站的观测资料和记录的气象元素计算各卫星的星历表（预报星历），以及卫星钟改正数。并以规定格式编制成导航电文，以便从地面天线注入卫星。GPS时间（主控站用一组原子钟为标准而建立GPS的时间系统）和UTC之间的时间累积偏移应保持在100ns以内，该数值由海军天文台测定，并由主控站将其编入导航电文中。通过一段较长的时间后，主控站也能解出更精确的监测站坐标、地球引力场系数和有关的天文物理常数。

二、地面天线（注入站）

无人操作的地面天线，由一台直径为10m的天线和一台IBM系列的微型电子计算机所组成。它能在主控站的控制下，向卫星注入导航电文和其它命令，每天向每个卫星注入四次电文。为了防止由于主控站向地面天线传送导航电文时的故障而影响卫星星历的更新，主控站在地面天线向卫星注入前1小时预先传送导航电文再传送新的星历。地面天线和卫星的联系采用空间与地面标准连接系统频率（上行注入频率为1783.74mHz，下行频率为2227.5mHz），地面天线每分钟还可向主控站发播信息，报告自己的工作状态。

三、监测站

监测站是在主控站控制下的无人值守的数据自动收集中心。每个监测站内有一台GPS接收机，若干台环境数据传感器，一台原子钟和一台计算机信息处理器。以原子钟作为频率标准的接收机对GPS卫星信号进行伪距测量和伪距差测量（积分多普勒测量）。为了进行对流层折射改正，监测站还要通过环境传感器自动收集当地的气象元素，如温度、气压、相对湿度等。每一个监测站还将对跟踪资料进行下列改正：天线效应改正、相对论效应改正和讯号传播延迟改正。并对上述资料进行编辑和平滑处理。资料的收集、处理和存贮工作均由计算机信息处理器完成，然后传送给主控站。

四、通讯辅助系统

通讯辅助系统将综合利用地面通讯线、海底电缆和卫星通讯等手段，将主控站、地面天线及监测站联接起来。所有的资料都将用编码传送。主控站将通过复式9600baud的全双联 C_2 线和地面天线联接，将通过一条4800baud的全双联 C_2 线和监测站联接。

在全球定位系统的试验阶段中，为了对整个系统的性能进行检核和改进，建立了初级地面控制系统。该控制系统的主控站和地面天线设在加利福尼亚州的范登堡空军基地，而4个监测站则分别位于阿拉斯加州的埃利门多夫空军基地、关岛的安德森空军基地，夏威夷的瓦希阿瓦和加利福尼亚州的范登堡空军基地。

全球定位系统正式投入工作时，将使用工作控制系统，它的主控站将设在科罗拉多州的联合空间工作中心。3个地面天线站将分别位于Kwajalein，Diego carcia和Ascensi n岛。监测站共有5个，其中3个监测站和地面天线站重合，另2个分别位于夏威夷以及科罗拉多州的联合空间工作中心。

9.2.3 用户装置部分

用户装置主要由天线、接收机、微处理机和输入输出设备四部分组成，有时用户装置也统称为接收机。用户装置的天线一般比较简单，大多采用全向天线。可接收来自任何方向的信号，但由于信号很微弱，因而把信号送给接收机前，需通过前置放大器将信号放大。

接收机的主要功能是对来自天线的接收信号进行处理，以获得所需的观测值。由于接收机的类型不同，观测量的不同（伪距测量，积分多普勒测量，载波相位测量等），因而接收机的结构以及对信号的处理过程也不相同。

微处理机的功能主要有两个，一是选择合适的卫星进行观测，以获得最佳的几何图形，并对观测值进行对流层及电离层折射的改正，根据观测值及卫星星历进行平差计算，求得用户的三维坐标和速度等未知数；二是对整个用户设备进行控制和自检核，并通过输入输出设备与操作人员保持联系。

输入输出设备的种类很多，常见的输入设备有键盘、盒式磁带机及各种数据传输线；常见的输出设备则有显示器和打印机等。

图9-1是三种接收机的外形示意图。

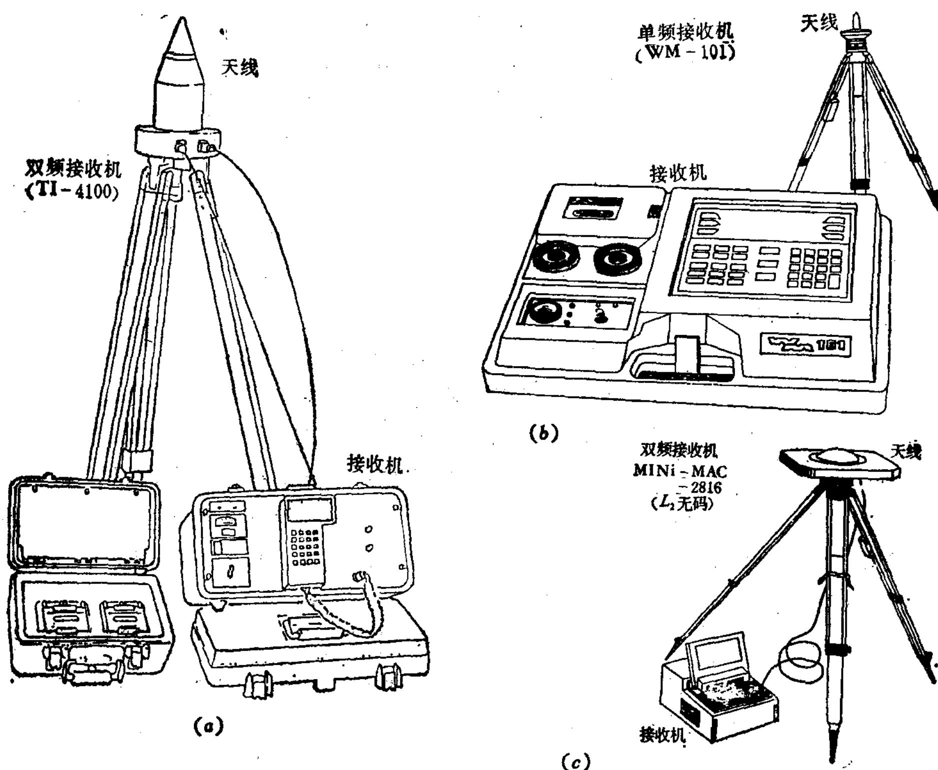


图 9-1

§9.3 伪距法定位

利用全球定位系统进行精密大地定位一般可采用四种方法：伪距法，多普勒法，干涉测量法和载波相位测量法。后两种方法可以获得非常精确的结果，是进行精密大地定位的主要方法。不过，干涉法所需的设备类似于甚长基线干涉测量的设备，费用太高，且流动不便，因此干涉法难以推广应用。

伪距法定位是利用全球定位系统进行导航的最基本的方法。其基本原理是：在某一瞬间利用GPS接收机测定（至少）4颗卫星的伪距，根据已知的卫星位置和伪距观测值，采用距离交会法即可求得接收机的三维坐标和时钟改正数，必要时（主要指导航时）还可进行多普勒测量，求出接收机的三维运动速度。

利用伪距法进行大地定位时，一次定位的精度并不高（利用P码进行定位时，中误差约为±10m；利用C/A码进行定位时，中误差约为±50m），但是由于定位速度很快，所以观测几小时后仍能达到米级的精度，大致和子午卫星多普勒单点定位的精度相仿，但所需的时间则比多普勒定位所需的时间要少得多，而且增加观测时间后可获得较高的精度。据国外文献介绍，观测一天后定位精度为0.5～0.8m，观测5天后定位精度可达

0.25～0.4m。用伪距法定位可以获得在 WGS-84 系统中的绝对坐标。

单点定位时，卫星星历误差和大气传播延迟误差对定位结果的影响很大，但这种误差对于相距不太远的两个测站的影响大致是相同的。和子午卫星多普勒定位时的情况一样，我们可以利用误差的相关性来求得高精度的坐标差，我们把这种方法称为伪距法联测定位。下面给出的是在美国进行的一次试验的结果：两站相距10km，共观测 1000 分钟，所获得的相对坐标的精度如表 9-1 所示。

表 9-1

	好观测条件	坏观测条件
ΔL	±2.7cm	± 9.0cm
ΔB	±3.0	± 5.7
ΔH	±8.9	±12.7
点位误差	±9.8	±16.6

卫星的位置可以根据卫星的广播星历计算，也可根据精密星历计算。广播星历是根据注入卫星前一段时间监测站的观测资料外推而得到的一种预报星历。其精度较低，任何用户均可获得。它对导航具有极其重要的作用，因为导航需要进行实时处理。精密星历则可以在事后根据更多的监测站观测资料，更长的弧段，进行更严密的数学处理而获得，它是根据实测资料求得的，因而具有更高的精度，但一般用户不易获得。

应当说明，本章中所讲的接收机位置实际是指接收机天线相位中心的位置，化到标石中心要经过归算，为了方便简称为测站位置。在导航中，则统称为用户的位置。

9.3.1 伪距测量原理

卫星到接收机之间的距离，是根据卫星发射的码信号传播时间（用卫星钟和接收机钟指示的）求出的，受到卫星钟和接收机钟的误差影响。同时由于信号并不是在真空中传播的，含有大气传播延迟误差。我们称这样测出的距离为伪距。下面讨论卫星至测站的真正距离 ρ 和伪距 $\tilde{\rho}$ 之间的关系。实际上每个卫星和接收机都是各自依照自己的时钟来独立地维持局部时间系统的。一般地说，这些局部时间系统和 GPS 标准时并不相等。我们把第 j 个测站上依据接收机的时钟所获得的时间记为 T_j。把第 i 个卫星依据卫星钟所获得的时间记为 t^i，而 GPS 标准时则用 τ 来表示。显然，T_j 和 t^i 都是 τ 的函数，即 $T_j=T_j(\tau)$，$t^i=t^i(\tau)$。这种函数关系式可表示为

$$\left.\begin{aligned} t^i(\tau)&=\tau-(a_0+a_1\Delta t^i+a_2\Delta t^{i2}) \\ T_j(\tau)&=\tau-(A_0+A_1\Delta T_j+A_2\Delta T_j^2) \end{aligned}\right\} \tag{9-1}$$

伪距观测实际上就是测定时间差，即

$$T_j(\tau_b)-t^i(\tau_a)=\frac{1}{c}\tilde{\rho}_j^i$$

或

$$\frac{1}{c}\widetilde{\rho}_j^i=T_j(\tau_b)-t^i(\tau_a)$$

$$\begin{aligned}&=[\tau_b-\tau_b+T_j(\tau_b)]-[\tau_a-\tau_a+t^i(\tau_a)]\\&=[\tau_b-\tau_a]+[\tau_a-t^i(\tau_a)]-[\tau_b-T_j(\tau_b)]\\&=[\tau_b-\tau_a]+V_{ti}-V_{T_j}\end{aligned} \tag{9-2}$$

式中$\widetilde{\rho}_j^i$为卫星i至测站j的伪距，C为真空光速，τ_a是卫星钟的读数为t^i这一瞬间的GPS标准时，所以$[\tau_a-t^i(\tau_a)]=V_{ti}$即为卫星钟的时钟改正数。同样，$[\tau_b-T^j(\tau_b)]=V_{T_j}$为接收机时钟的改正数，$(\tau_b-\tau_a)$是用没有误差的时钟测定的信号从卫星至用户的实际传播时间。设$(\delta\rho_j^i)_{ion}$和$(\delta\rho_j^i)_{trop}$分别表示电离层和对流层的折射改正，则

$$\tau_b-\tau_a=\frac{1}{c}[\rho_j^i-(\delta\rho_j^i)_{ion}-(\delta\rho_j^i)_{trop}]$$

因而伪距$\widetilde{\rho}_j^i$和真正的距离ρ_j^i之间的关系为

$$\left.\begin{aligned}&\widetilde{\rho}_j^i=\rho_j^i-(\delta\rho_j^i)_{ion}-(\delta\rho_j^i)_{trop}+cV_{ti}-cV_{T_j}\\&\text{或}\\&\rho_j^i=\widetilde{\rho}_j^i+(\delta\rho_j^i)_{ion}+(\delta\rho_j^i)_{trop}-cV_{ti}+cV_{T_j}\end{aligned}\right\} \tag{9-3}$$

式中

$$\rho_j^i=|\vec{r}^i-\vec{R}_j|=\sqrt{(x_i-X_j)^2+(y_i-Y_j)^2+(z_i-Z_j)^2}$$

(x_i, y_i, z_i)为第i个卫星的位置坐标，(X_j, Y_j, Z_j)为第j个测站坐标。

9.3.2 伪距法定位

一、定位原理

如果卫星钟和接收机钟在观测瞬间的钟改正数V_{ti}和V_{T_j}都是精确已知的。那么测定了伪距$\widetilde{\rho}$就等于测定了真正的距离ρ（假定电离层改正和对流层改正均可准确求得）。这时用户只需同时测定至3颗卫星的距离$\widetilde{\rho}_1$、$\widetilde{\rho}_2$和$\widetilde{\rho}_3$，就可根据卫星的位置和测定的距离，求出测站的坐标X、Y、Z。这可根据（9-3）式列出3个方程并解算就可以做到。

但是精确已知任一观测瞬间的时钟改正数这一假定只有对稳定度特别好的原子钟才有可能成立。在数目有限的卫星上配备原子钟是能办到的，但在数以万计的接收机上都安装原子钟却是不现实的，因为这样会大大增加接收机的成本，严重影响全球定位系统的用户数目。解决这个问题的办法，是把观测瞬间接收机的时钟改正数V_{T_j}，当作一个未知数来处理。这时用户至少需同时测定4颗卫星的伪距，以便同时解算4个未知数X、Y、Z和V_{T_j}。因而实际上伪距法定位的数学模型为

$$[(x_i-X)^2+(y_i-Y)^2+(z_i-Z)^2]^{\frac{1}{2}}-cV_{T_j}=\widetilde{\rho}_i+(\delta\rho_i)_{ion}+(\delta\rho_i)_{trop}-cV_{ti} \tag{9-4}$$

$i=1、2、3、4\cdots\cdots$

式中的 V_{ti} 为第 i 个卫星的卫星钟在观测瞬间的时钟改正数。在伪距法定位的数学模型中，我们认为它是已知的，可以根据卫星导航电文中的时钟改正参数求得。显然接收机时钟改正数 V_T 本身的数值是多少关系并不大，只要求在方程组（9-4）中保持不变即可。由于接收机是同时（或在很短的时间内）测定用户到4个（或4个以上）卫星的距离的，因而即使接收机时钟使用的只是短期稳定性较好的石英钟，上述要求一般也可得到满足。当（9-4）方程式的个数大于4时，可用最小二乘法求得测站坐标和接收机钟钟差的最或是值。

二、定位计算

下面介绍一种定位计算的方法。如图9-2所示，图中 $\vec{\rho}_i^0$ 为单位矢量。因为

$$\vec{\rho}_i=\vec{r}_i-\vec{R}$$

故有
$$\vec{\rho}_i^0\cdot\vec{\rho}_i=\rho_i=\vec{\rho}_i^0\cdot\vec{r}_i-\vec{\rho}_i^0\cdot\vec{R}$$
$$i=1.2\cdots\cdots n,\qquad n\geqslant 4$$

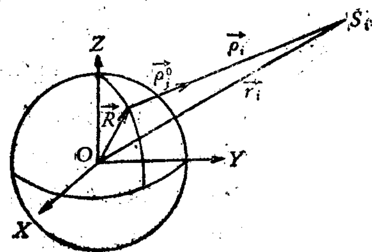


图 9-2

式中 ρ_i 为测站至第 i 颗卫星的距离，即

$$\rho_i=\rho_i'+\Delta\rho_{ion}^i+\Delta\rho_{trop}^i+cdt_{si}-cdt=\overline{\rho}_i+B_{si}-B \tag{9-5}$$

式中 $\overline{\rho}_i$ 为加上电离层、对流层延迟改正后的测站至第 i 个卫星的伪距，B_{si} 为卫星钟钟差的等效距离，B 为用户钟钟差的等效距离。这样我们可将（9-4）式写成

$$\left.\begin{array}{l}\vec{\rho}_i^0\cdot\vec{R}-B=\vec{\rho}_i^0\cdot\vec{r}_i-B_{si}-\overline{\rho}_i\\ i=1.2\cdots\cdots n,\qquad n\geqslant 4\end{array}\right\} \tag{9-6}$$

式中
$$\vec{\rho}_i^0=\begin{pmatrix}l_i\\m_i\\n_i\end{pmatrix},\quad \vec{r}_i=\begin{pmatrix}x_{si}\\y_{si}\\z_{si}\end{pmatrix},\quad \vec{R}=\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}l_1&m_1&n_1&1\\l_2&m_2&n_2&1\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\l_n&m_n&n_n&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\\-B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r_1&0&\cdots\cdots&0\\0&r_2&\cdots\cdots&0\\\vdots&\vdots&&\vdots\\0&0&\cdots\cdots&r_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\\vdots\\s_n\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\overline{\rho}_1\\\overline{\rho}_2\\\vdots\\\overline{\rho}_n\end{pmatrix} \tag{9-7}$$

式中 $r_i=(l_i\ \ m_i\ \ n_i\ \ 1)$

$s_i=(x_{si}\ \ y_{si}\ \ z_{si}\ \ B_{si})^T$

令

$Xu=[X, Y, Z, -B]^T$，称为用户状态矩阵，

$s=[s_1, s_2, s_3\cdots\cdots s_n]$，称为卫星状态矩阵，

$\rho=[\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2, \cdots\cdots\overline{\rho}_n]^T$，称为测量矩阵，

$$Gu=\begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 & 1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ l_n & m_n & n_n & 1 \end{pmatrix},\qquad Au=\begin{pmatrix} r_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$$

Gu 和 Au 称为几何矩阵，它们只和用户和卫星间的几何图形有关。于是我们可以 把伪距法定位计算的公式（9-7）写为

$$Gu\,Xu=-AuS-\rho \tag{9-8}$$

$$Xu=[Gu^T\,Gu]^{-1}\,Gu^T[Au\,S-\rho] \tag{9-9}$$

式（9-9）适用于计算机进行迭代计算，式中的测量矩阵 ρ 和卫星状态矩阵 S 均为 已知。给出用户状态矩阵的初始值 $X_u^{(0)}$ 后，即可根据用户的初始坐标和卫星的已知坐标计算几何矩阵 Gu 和 Au，然后求得用户状态矩阵的第一次趋近值 $Xu^{(1)}$，反复迭代，直至 $Xu^{(n+1)}-Xu^{(n)}<\varepsilon$ 时为止。

9.3.3 误差分析

一、测距误差

全球定位系统采用了各种校正技术，以便使误差尽可能减小。下面讨论校正后的残余误差影响。

1．卫星的星历误差和时钟误差

由于各监测站对卫星进行跟踪测量时的测量误差，也由于我们还无法完全了解的影响卫星运动的各种摄动因素及它们的变化规律，因而所预报的星历中不可避免地会存在误差。此外，卫星钟经改正后也仍然会残留着某些误差，它和卫星星历中的径向误差不易分开。星历误差和时钟误差对测距的综合影响大约为± 1.5m。

2．大气延迟误差

使用单频接收机的用户，可以根据星历中给出的参数 α_0、α_1、α_2、α_3、β_0、β_1、β_2 和 β_3 进行电离层改正，根据记录的气象元素和适当的模型进行对流层改正，改正后的残余误差大约为 2.44～5.18m。使用双频接收机可以较为有效地消除电离层折射的影响。

3．群延迟误差

群延迟误差是卫星在处理和传播信号过程中所产生的延迟，在发射前要从地面上对这些延迟进行测量校准，其总效应将反映到卫星钟的校正参数中去，残余误差大约为±1m。

4．多路径误差

这是由于信号从不同的路径到达接收机而产生的误差。路径不同会使信号发生变形而造成距离测量的误差，这种误差和用户的周围环境（如地形、地物及其反射特性）有关，其数值大约为 ±1.2～2.7m。

5．接收机误差

接收机在接收处理信号时所产生的噪声和信号清晰度误差将带来测距误差，而且接收

测距误差　　　表 9-2

(校正后)残余误差源	等效距离误差(m)
卫星星历和时钟误差	±1.5
大气延迟误差	±2.4～5.2
群延迟误差	±1.0
多路径误差	±1.2～2.7
接收机误差	±1.5
总的测距误差	±3.6～6.3

机本身的动态特性也将影响测距的精度。对于质量较好的接收机来讲，这项误差估计为±1.52m。

考虑上述各种误差的综合影响，总的测距误差 $\sigma=\pm3.2\sim6.3$m，如表 9-2 所示。

二、定位和定时精度

上面已经讨论了如表 9-2 所示的五种残余误差对测距结果带来的影响，现在我们要进一步分析这些测距误差将会给定位和定时造成什么影响。

1．误差系数

从式（9-9）可得出用户状态阵的协方差阵为

$$\mathrm{COV}\boldsymbol{Xu}=[\boldsymbol{Gu}^T\boldsymbol{Gu}]^{-1}\boldsymbol{Gu}^T\mathrm{COV}[\boldsymbol{AuS}-\rho][(\boldsymbol{Gu}^T\boldsymbol{Gu})^{-1}\boldsymbol{Gu}^T]^T \tag{9-10}$$

其中

$$\mathrm{COV}[\boldsymbol{AuS}-\rho]=\mathrm{M}\{[(\boldsymbol{AuS}-\rho)-\mathrm{M}(\boldsymbol{AuS}-\rho)][(\boldsymbol{AuS}-\rho)-\mathrm{M}(\boldsymbol{AuS}-\rho)]^T\} \tag{9-11}$$

若不考虑卫星的星历误差和时钟差，那么

$$\mathrm{COV}(\boldsymbol{AuS}-\rho)=\mathrm{M}[(\rho-\mathrm{M}\rho)(\rho-\mathrm{M}\rho)^T] \tag{9-12}$$

假定各伪距测量值 ρ_1、ρ_2、…、ρ_n 之间是互相独立的，而且精度也相同，令其方差为 σ^2，则有 $\mathrm{COV}(\boldsymbol{AuS}-\rho)=\sigma^2$，由于上述假定与实际情况相差不大，因而是允许的。这时

$$\mathrm{COV}\,\boldsymbol{Xu}=\sigma^2(\boldsymbol{Gu}^T\boldsymbol{Gu})^{-1}=\sigma^2\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14}\\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24}\\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34}\\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44}\end{pmatrix} \tag{9-13}$$

此外，COV $\boldsymbol{Xu}$ 也可写为 F 列形式：

$$\mathrm{COV}\,\boldsymbol{Xu}=\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ} & \sigma_{XB}\\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 & \sigma_{YZ} & \sigma_{YB}\\ \sigma_{XZ} & \sigma_{YZ} & \sigma_Z^2 & \sigma_{ZB}\\ \sigma_{XB} & \sigma_{YB} & \sigma_{ZB} & \sigma_B^2\end{pmatrix} \tag{9-14}$$

因为

$$\sigma_P=(\sigma_X^2+\sigma_Y^2+\sigma_Z^2)^{\frac{1}{2}}=\sigma\cdot(g_{11}+g_{22}+g_{33})^{\frac{1}{2}}$$

$$\sigma_t=\sigma_B=\sigma\cdot\sqrt{g_{44}}$$

我们把 $\sqrt{g_{11}+g_{22}+g_{33}}$ 叫做点位误差系数 PDOP，把 $\sqrt{g_{44}}$ 叫做定时误差系数 TDOP。

有时为了方便，可以根据直角坐标 X、Y、Z 和地理坐标 B、L、H 的关系，求出高

程误差系数 VDOP 和平面位置误差系数 HDOP。这样就可以很方便地估计定位误差和定时误差，即

$$
\left.\begin{array}{ll}
\text{测站的高程误差} & \sigma_V=\sigma\cdot \text{VDOP} \\
\text{测站的平面位置误差} & \sigma_H=\sigma\cdot \text{HDOP} \\
\text{测站的点位误差} & \sigma_P=\sigma\cdot \text{PDOP} \\
\text{定时误差} & \sigma_B=\sigma\cdot \text{TDOP}
\end{array}\right\} \tag{9-15}
$$

当高度角大于 5° 时，选择分布最佳的 4 颗卫星进行观测，误差系数的均方根值分别为

$$
\text{VDOP}=2.16,\qquad \text{HDOP}=1.45,
$$
$$
\text{PDOP}=2.6,\qquad \text{TDOP}=1.2
$$

因而伪距法一次定位的均方根差大致为：

$$\sigma_V=7.8\sim13.6\text{m}$$
$$\sigma_H=5.2\sim9.1\text{m}$$
$$\sigma_P=9.4\sim16.4\text{m}$$
$$\sigma_B=4.3\sim7.6\text{m}\ \text{（相应的距离误差），}$$
$$\sigma_T=15\sim25\text{ns}$$

计算时，σ 取 3.6～6.3m。误差系数和观测误差无关，仅与卫星和测站所组成的图形有关，它和大地测量中的图形权倒数的概念类似。

为了获得尽可能高的定位精度，应该使点位误差系数 PDOP 尽可能小，下面介绍一种比较直观的选择卫星时的判断标准。以测站 P 为球心作一个单位球，以 4 颗卫星在该单位球面上的投影点和 P 点为顶点可构成一个六面体。可以证明，点位误差系数 PDOP 和该六面体的体积 V 成反比，为了获得较好的定位精度，就需要这样选择卫星：使卫星在单位球上的投影点和测站 P 所构成的六面体的体积尽可能大。当一颗卫星在测站的天顶，其它 3 颗卫星互相相隔 120°，高度角尽可能小（小到允许的最低限度）时，该六面体的体积 V 为最大，定位精度最高。这就是选择卫星的标准。当测站上空有多颗星时，接收机的微处理机可根据卫星电文中各卫星的概略星历和测站的概略坐标，自动计算并选择最佳的 4 颗卫星进行观测。

从上面的讨论可以看出，利用 GPS 可以进行精密的授时，因为伪距法一次定位就可将用户的时钟差确定到 15～25ns 的精度。已知自己的位置并有高稳定度频率标准的用户（如天文台、人卫站等），仅用一颗卫星的信号，就能精确测定台站时钟的改正数，精度可达 10～20ns。此外，顺便说明一下，利用全球定位系统还可以确定用户的三维速度分量和接收机的频偏。我们利用多普勒观测可以测定用户相对于 4 颗卫星的径向速度，由于卫星的径向速度可以根据星历表精确算出，因而从 4 个方程就可以解出用户的三维速度和频率偏移这 4 个未知参数。在良好环境中，高质量的接收机测定用户至卫星的径向速度的精度可达 1cm/s，在不好的动态环境中，径向速度的测定误差为 6cm/s～15cm/s。当径向速度的测定误差为 1.5cm/s时，用户水平运动速度的均方根值为9cm/s，垂直运动速度的均方根值为 13cm/s。

9.3.4 电离层改正和对流层改正

电离层位于离地面大约40～1100km高度的范围内，在那里气体被电离。无线电信号通过电离层时，传播速度将发生变化，路径也将产生弯曲。其总的群延为

$$\tau = \frac{A}{f^2} + \frac{B}{f^3} + \frac{C}{f^4} \tag{9-16}$$

式中f为载波频率，A、B、C均与频率f无关。对于1500MHz的载波频率来讲，$\frac{B}{f^3} \leqslant 3\text{cm}$，$\frac{c}{f^4} \leqslant 8\text{cm}$，略去这两项后，$\tau \approx \frac{A}{f^2}$。这和子午卫星多普勒测量一样，可以利用双频方法进行电离层折射改正，即$\Delta\tau = \tau_{L_2} - \tau_{L_1} = \frac{A}{f_2^2} - \frac{A}{f_1^2} = \frac{A}{f_1^2}\left[\frac{f_1^2 - f_2^2}{f_2^2}\right]$

$$= \tau_{L_1} \cdot \left[\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 - 1\right] = \tau_{L_1} \cdot \left[\left(\frac{154}{120}\right)^2 - 1\right] = 0.6469\tau_{L_1} \tag{9-17}$$

$$\left.\begin{aligned} \tau_{L_1} &= 1.54573\Delta\tau \\ \tau_{L_2} &= 2.54573\Delta\tau \end{aligned}\right\} \tag{9-18}$$

显然，$\Delta\tau$也就是两个频率的信号从卫星至接收机的时延之差$t_{L_2} - t_{L_1}$。

对流层是由水汽和其它大气成分组成的一种中性气体。信号通过对流层时，产生的时延是干气压、水汽压和温度的函数，但和信号频率无关，故不能采用双频方法来改正，而必须采用一个合适的模型来加以改正。下面列出对流层改正的简化的Hopfield模型的计算公式（详见参考文献[11]）：

$$\Delta\rho_{trop} = \frac{K_d}{\sin(E^2 + 6.25)^{\frac{1}{2}}} + \frac{K_W}{\sin(E^2 + 2.25)^{\frac{1}{2}}} \tag{9-19}$$

式中

$$\left.\begin{aligned} K_d &= 1.552 \times 10^{-5}\frac{P}{T}[(148.72T - 488.3552) - h_{stn}] \\ K_W &= 7.46512 \times 10^{-2}\frac{e}{T^2}(11000 - h_{stn}) \end{aligned}\right\} \tag{9-20}$$

T为绝对温度，P为气压（mbar）、E为测站至卫星的高度，e为水汽压（mbar）、h_{stn}为测站距大地水准面的高度（m）。

伪距法定位是利用全球定位系统进行导航定位的基本方法。这种方法可以在很短的时间内（几秒钟，至多几十秒钟）获得用户的位置。其精度一般可以满足导航的要求。按照美国政府现行的有关全球定位系统的规定，全球定位系统将向不同的用户提供两种不同的服务。一种是精密定位服务（PPS），即使用P码进行伪距法定位，它能以95%的置信度提供精度为20m的定位，即定位中误差为10m。但它将被视为有关国家安全的高度机密而仅供美国及其盟国的军事用户使用。最近美国国防部对这一政策作了一些修改，国内外的

民间用户提出申请经批准后也可使用 PPS。另一种是使用 C/A 码进行伪距法定位，称为标准定位服务（SPS）。由于 C/A 码的波长是 P 码波长的 10 倍，因而跟踪精度将远低于 P 码的跟踪精度，加之 C/A 码仅调制在 L_1 载波信号上，无法采用双频方法消去电离层的影响，而只能采用一定的模式进行改正，所以精度较低。SPS 能以 95% 置信度提供精度为 100m 的定位。标准定位服务是向全世界所有用户开放的，但在非常时期美国将有意降低其导航定位的精度。

9.3.5 导航电文

导航电文是卫星提供给用户的有关卫星星历、系统时间、卫星钟性能、发射机状态以及如何从 C/A 码交换为 P 码的有关信息，使用户能利用全球定位系统进行成功的导航。

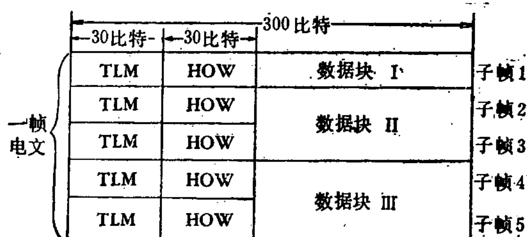


图 9-3 导航电文基本结构图

导航电文是以二进制码的形式发送的，码率为50Hz，每个二进制码为20ms。电文按帧传送，每帧电文包含 1500 个二进制码，周期为 30sec。每个帧又分为 5 个子帧，每个子帧都包含 300 个二进制码，周期为 6sec。每个子帧又由 10 个字组成，每个字包含 30 个二进制码。

导航电文的基本结构如图 9-3 所示，下面分别对各部分加以介绍。

一、遥测字 TLM 和交接字 HOW

每个子帧都以遥测字和交接字开头，遥测字包含 8 个比特的前导（同步码），14 个比特的遥测字电文，2 个无信息意义的比特和 6 个比特的奇偶检验。同步码为子帧的编码脉冲提供一个同步起点，编码脉冲从起点开始顺序编组成电文，接收机则从起点开始顺序译出电文。同步码开始的瞬间作为时标信号，其对应的时间在前一子帧的交接字中给出。

交接字由 17 比特的 Z 计数（给出下一子帧开始瞬间的 GPS 时间） 1 个比特的同步标志，3 个比特的子帧识别字符，2 个无信息意义的比特和 6 个比特的奇偶检验位组成。Z 计数为从每星期六午夜起算的子帧数。如图 9-4 所示，Z 计数乘 6s 后即下一个子帧的前延所对应的 GPS 时，所以 Z 计数实际上是时间记数。

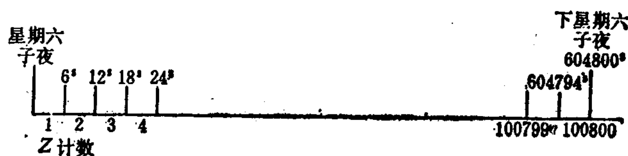


图 9-4 Z 计数

因为 $2^{16}<100800<2^{17}$，所以需要用 17 个比特来表示 Z 计数。此外，Z 计数很容易从周期为 1.5s 的 X_1 截短序列的周期检测器上获得。HOW 码的主要作用是使接收机时

钟和卫星钟同步，以便实现由C/A码的跟踪到P码搜索跟踪的转换。

遥测字和交接字都是由卫星本身产生的，不需要从地面注入站注入，这是和数据块Ⅰ、数据块Ⅱ和数据块Ⅲ不同的地方。

二、数据块Ⅰ（卫星时钟校正）

导航星系统是通过比较卫星钟的信号间的时间差来测量距离的，因而时钟误差将直接变为测距误差。下面将主要讨论卫星钟的误差。卫星钟相对于GPS标准时间的误差主要来自下列两个方面。

1. 卫星钟本身的误差

卫星上的原子钟也不是绝对稳定的，其误差一般可表示为

$$\Delta t = t_0 + \delta t + \frac{a_1}{2}t^2 + \cdots\cdots + e(t) \tag{9-21}$$

其中，t_0 为时钟在起始时刻的时间误差（钟差）；

δ 为时钟在起始时刻的频率偏移（钟速、频偏）；

a_1 为时钟的老化率或频率漂移率（钟速的变率、频漂）；

$e(t)$ 为时钟的随机漂移。

对铷原子钟而言，$a_1 < 10^{-14}$/日，铯原子钟和氢原子钟则可忽略 a_1。随机漂移是由于热噪声、温度、磁场及老化的起伏变化等原因而引起，对于铯原子钟来讲，随机漂移的均方误差 σ 约为2.6 ns（观测时间为1小时）。

2. 时钟的相对论效应

由于卫星在高速运动，狭义相对论效应会使时钟产生时间漂移。设卫星钟相对于地心。惯性系的运动速度为 v_s，地面钟的运动速度为 v，那么卫星钟和地面钟表示的时间之间有下列关系

$$\frac{T_s}{T} = \frac{T_0\left(1-\left(\frac{v_s}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{T_0\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \approx 1 + \frac{v^2 - v_s^2}{2c^2} \tag{9-22}$$

对于GPS卫星而言，$v_s \approx 3.863$km/s，对$\varphi = 45°$的测站而言，$v = 0.328$km/s，$T_s - T = -8.2 \times 10^{-11}T$。另外，根据广义相对论理论，卫星钟和地面钟所处的重力场位不同，因而走时也不一样，对GPS卫星而言，有

$$T_s - T \approx (\phi_s - \phi)/c^2 \approx +5.305 \times 10^{-10}T \tag{9-23}$$

综合考虑二种相对论效应后可得

$$T_s - T = 4.48 \cdot 10^{-10}T \tag{9-24}$$

这说明卫星钟比地面钟走得快，每秒钟就差0.45ns，因而需加以效正。校正的办法之一是把卫星钟的标准振荡频率减小 4.48×10^{-10}，即卫星钟上的10.23 MHz的标准频率应降为

$$10.23\ \text{MHz}(1 - 4.48 \times 10^{-10}) = 10.22999999545\text{MHz}$$

这样加上广义和狭义相对论效应后，就和地面原子钟组保持的GPS时间大致相同。

也就是说，降低频率后可以改正掉相对论效应中的主要的常数部分。但是，由于卫星的运行和地球的自转，卫星钟所处的重力场是变化的，它与整个地球重力场模型有关。此外，卫星还受到太阳和月球重力场的作用，同时由于卫星轨道偏心率并不完全等于零，因而卫星运动的速度也是在变化的。所以由于相对论效应而产生的时间偏移也不是常数，而是一种复杂的周期性函数。它和卫星的运动周期及地球自转周期等有关，它也可以表示为式（9-21）的形式，当然系数值是不同的。同时考虑到原子钟本身的误差及相对论效应的影响，可以得到卫星钟钟差模型为

$$\Delta t_s = a_0 + a_1(t-t_0) + a_2(t-t_0)^2 \tag{9-25}$$

其中a_0、a_1、a_2分别表示卫星钟的钟差，钟速和钟速的变率（频率漂移率）。其数值可以由地面控制中心根据实测资料预估求出，再送入卫星，由卫星在第一子帧中播出。但在卫星的第三阶段电文中，系数a_0、a_1、a_2已去掉了广义相对论的影响。数据块Ⅰ中其它电文的意义如下：

WN（10比特）表示星期数，其起点在1980年1月5日午夜的原子时UTC的零点。C/A或P码（2比特），这二个比特若为“01”则表示将P码调制到L_2载波信号上，若为“10”则表示将C/A码调制在L_2载波信号上。星历精度n（4比特）表示卫星的星历不优于2^n米。例如n为0101＝5，则表示星历精度不优于32米；若$n=1111=15$，就表示卫星星历完全没有准确预报。使用这类星历所造成的损失由用户自己负责。由于GPS在军事上有重要作用，因而在非常时期，美国将有意降低C/A码调制的卫星星历的精度。

Health（6比特）表示卫星的工作是否正常，每个字代表卫星中某一部分的工作状况。AODC为钟龄参数。在第三阶段电文中，已从原来的8比特扩充为10比特，AODC $=t_{oc}-t_L$，其中t_{oc}为数据块Ⅰ的参数时间，t_L是为估计这些参数所进行的测量工作中最后观测的时间。AODC实际上表示时钟改正数外推时间间隔，它反映出这些钟改正参数的可信程度。根据卫星钟的稳定性以及控制中心预报钟改正参数的能力，可以建立一个“降权函数”，使钟龄较小的时钟改正数有较大的权。

原来在数据块Ⅰ中的大气折射改正参数α_0、α_1、α_2、α_3、β_0、β_1、β_2、β_3，在第三阶段电文中已取消，而放在第18帧电文的第4子帧内。T_{GD}（8比特）表示L_1和L_2的钟频率信号在所经路程上传播的时间之差，该参数是为单频用户提供的，对双频用户来讲无关紧要。

三、数据块Ⅱ（卫星星历）

数据块Ⅱ出现在第2和第3子帧内，它是由地面控制中心产生，经地面天线注入卫星的。卫星星历是导航电文中的主要部分。

1．卫星星历参数

卫星星历可采用许多形式表示，例如用一组时间多项式来表示，或用一组调和展开式来表示，也可采用开普勒轨道参数加上必要的摄动改正项来表示。全球定位系统的研制人员在选择表示方法时考虑了这样一些因素：所需的电文长度（比特数），用户计算所需时间的多少，用户所需的存储单元的多少，一组数据能使用的时间的长短（即数据的更换

率，它影响到卫星存储器容量的大小），以及是否具有明显的几何意义等，还考虑了各种表示形式的精度并进行了综合的比较，最后决定采用开普勒轨道参数加上必要的摄动改正这一方式来表示卫星的位置。

在选用开普勒轨道参数时，通常选用a、e、i、Ω、ω、t_P这六个轨道参数。在卫星星历中则用参考时刻t_{oe}及参考时刻的平近点角M_0这两个参数来代替卫星过近地点的时刻t_P。其原因是卫星运行周期为12小时，若选用过近地点时刻作为参考时刻，则摄动计算时的时间间隔就可能很大，现改为每组数据的中间时刻为参考时刻，摄动计算时的时间间隔可大为减小。若每组星历参数广播1小时后更换，那么摄动计算的最大时间间隔只有30分钟，有利于提高摄动计算的精度，并能减少摄动参数的个数。倘若摄动计算的时间间隔更长时，现有的摄动参数的个数就不够了，那就要考虑更多的摄动项，而且对现在采用的几个摄动参数，也将提出更高的精度要求。这就是在星历参数中用M_0和t_{oe}取代了t_P的原因。

数据块Ⅱ中的参数意义如下：

M_0——参考时刻t_{oe}的平近点角；

Δn——平均角速度与计算值n_0之差；

e——轨道偏心率；

$\sqrt{a}$——轨道半长径的平方根；

Ω_0——参考时刻的升交点赤经；

i_0——参考时刻的轨道倾角；

ω——近升距；

$\dot{\Omega}$——升交点赤经的变率；

C_{uc}、C_{us}——星升距的余弦、正弦调和改正项的振幅；

C_{rc}、C_{rs}——矢径的余弦、正弦调和改正项的振幅；

C_{ic}、C_{is}——轨道倾角的余弦、正弦调和改正项的振幅；

t_{oe}——星历的参考时刻，从星期六子夜起算，以秒为单位；

$\dot{i}$——轨道倾角变率；

$AODE$——星历数据龄期字$=t_{oe}-t_L$，其中t_L为预估卫星星历所进行的观测中最后测量的时间。所以，$AODE$实际上表示了根据实测资料外推星历时的外推时间间隔，它可以反映出卫星星历的可靠程度。

上述参数是根据$[t_{oe}-T,\ t_{oe}+T]$时间段内预报的卫星位置，即（t、x、y、z），经过最小二乘法曲线拟合而得到的。其中T为$\frac{1}{2}$（电文发射时间＋与下一个时间的重迭周期）＋5分钟。例如，同一组卫星星历发射持续的时间为1小时（即数据的更新率为1次/小时），重迭周期为30分钟，则$T=50$分钟。也就是说，上述参数的数值是根据100分钟的卫星预估位置拟合而得出，因而不适用于整个轨道。

2．如何根据卫星星历计算卫星坐标

（1）计算观测瞬间的平近点角M，

先计算

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} = \frac{\sqrt{\mu}}{(\sqrt{a})^3} \tag{9-26}$$

其中，$\mu = 3.986008 \cdot 10^{14} \mathrm{m^3/s^2}$（取自 WGS-72 系统），令 $t_k = t - t_{oe}$，t 为观测时刻，和 t_{oe} 一样也是从星期六子夜起算的，t_k 即观测时刻和参考时刻的时间差。

$$n = n_0 + \Delta n$$

n 为真正平均角速度。于是可得观测时刻 t 的平近点角为

$$M_k = M_0 + n t_k \tag{9-27}$$

（2）求偏近点角 E_k

$$M_k = E_k - e \sin E_k \tag{9-28}$$

解开普勒方程可求出偏近点角 E_k。

（3）计算真近点角，有

$$\left.\begin{aligned} \cos V_k &= \frac{\cos E_k - e}{1 - e\cos E_k} \\ \sin V_k &= \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E_k}{1 - e\cos E_k} \end{aligned}\right\} \tag{9-29}$$

（4）计算摄动改正项 δu_k、δr_k、δi_k，以及星升距的近似值 $u_k' = V_k + \omega$，ω 为近升距。

$$\left.\begin{aligned} \delta u_k &= C_{uc} \cos 2u_k' + C_{us} \sin 2u_k' \\ \delta r_k &= C_{rc} \cos 2u_k' + C_{rs} \sin 2u_k' \\ \delta i_k &= C_{ic} \cos 2u_k' + C_{is} \sin 2u_k' \end{aligned}\right\} \tag{9-30}$$

式中，δu_k 是 J_2 引起的星升距的摄动，δr_k 是 J_2 引起的卫星矢径的摄动，δi_k 是 J_2 引起的轨道倾角的摄动。

（5）计算 u_k、r_k、i_k

$$\left.\begin{aligned} u_k &= u_k' + \delta u_k \\ r_k &= a(1 - e\cos E_k) + \delta r_k \\ i_k &= i_0 + \delta i_k + (\dot{i} t_k) \end{aligned}\right\} \tag{9-31}$$

式中，u_k 为摄动改正后的星升距，r_k 为摄动改正后的卫星的矢径，i_k 为摄动改正后的轨道倾角。

（6）轨道平面坐标系内卫星位置的计算

$$\left.\begin{aligned} x_k &= r_k \cos u_k \\ y_k &= r_k \sin u_k \end{aligned}\right\} \tag{9-32}$$

（7）地固坐标系中卫星坐标的计算，首先

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \omega_e)t_k - \omega_e t_{oe} \tag{9-33}$$

式中，Ω_k为摄动改正后卫星升交点在地固坐标系内的经度值。ω_e为地球的平均自转角速度，$\omega_e = 7.292115147 \cdot 10^{-5} \text{rad/s}$。

于是

$$\left.\begin{aligned} X^k &= x_k \cos\Omega_k - y_k \cos i_k \sin\Omega_k \\ Y^k &= x_k \sin\Omega_k + y_k \cos i_k \cos\Omega_k \\ Z^k &= y_k \sin i_k \end{aligned}\right\} \tag{9-34}$$

显然，这样求得的坐标是瞬时大地坐标系内的坐标，该坐标系的Z轴指向瞬时北极，X轴在真赤道面内，指向格林尼治子午线，Y轴与X轴、Z轴组成右手直角坐标系，需加上极移改正后，才能化算为平大地坐标系的坐标。

四、数据块Ⅲ（卫星年历（almanac））

数据块Ⅲ存在于第5子帧及部分第4子帧内。和数据块Ⅰ、Ⅱ不同，它们不是每隔30秒重复一次（在正常情况下，1小时更换一次内容），而是每帧电文都不一样。25帧电文（12.5分钟）为一个周期，组成一个完整的部分。也就是说，数据块Ⅲ要每隔12.5分钟才重复一次。数据块Ⅲ也是由地面控制中心产生经地面天线注入卫星的。

数据块Ⅲ将包括：32颗卫星的概略星历；概略时钟效正参数；卫星识别符和工作状态是否正常等字符。第1～24帧电文中的第5子帧，将分别装入第1～24号卫星的概略星历和概略时钟改正参数。第25帧电文的第5子帧的电文，则反映第1～24号卫星的工作状态是否正常。这是由控制中心根据跟踪期间各卫星的实际工作状态预估而产生的。第2～5帧电文及第7～10帧电文中的第4子帧，则将分别装入第25～32号卫星的概略星历和概略时钟改正参数。第18帧电文的第4子帧，则包含了有关电离层折射和UTC的资料。第25帧电文中的第4子帧，将包括32颗卫星的识别标记，以及第25～32号卫星的工作状态。其余帧电文的第4子帧将留作专用或暂时空缺。

由于要把原来1、2、3子帧的内容压缩到一个子帧内，所以删除了一些参数，如时钟改正仅采用了a_0和a_1参数，卫星星历中则仅保留了l、t_{oe}、δ_i、$\dot{\Omega}$、$\sqrt{a}$、Ω_0、ω、M_0等参数。此外，各参数也不再保留原来的位数而作了截短。

卫星年历的作用是：只要跟踪到一颗卫星后，通过卫星年历即可了解到其余所有卫星的工作状态、概略星历和时钟改正数，以及该卫星是采用哪种结构的伪随机码。能使用户可以选择工作正常，能构成最佳几何图形的卫星进行观测（接收机中的微处理机可自动选择），同时还可以大大缩短搜捕卫星电文的时间，加快观测的速度。

§9.4 载波相位测量

伪距法测量也可以看成是对测距码信号进行的相位测量。由于测距码的波长较长，例如P码为29.3m，C/A码为293m，因而测站位置难以较高的精度确定。载波信号的波长则要短得多，L_1信号的波长为19cm，L_2信号波长为24.4cm，所以对载波信号进行相位

测量可以达到很高的精度。一般来说，相位测量本身的中误差大致为$\pm 5°\sim 10°$，有的接收机可达到$1°$，其相应的测距误差优于1mm。对L_1信号来讲，其相应的测距中误差为$\pm 3\sim 5$mm，L_2信号则为$3\sim 7$mm，这样的精度无疑是非常吸引人的。但载波信号是一种周期性的正弦信号，而相位测量又只能测定不足一个波长的部分，而无法确定其整数波长的个数，存在所谓的整周不确定性问题，因而解算过程比较麻烦，这是其缺点。

9.4.1 载波相位信号的获取

由于接收到的GPS信号中载波信号受到了很强的抑制，而且在伪码和数据码的调制过程中，使载波信号产生约20MHz的谱散。所以这两种载波信号都不再是单一频率的信号了。因而，在进行相位测量前必须首先设法获取载波信号，也称重建载波。从接收到的卫星信号中获取载波信号一般可采用两种方法。一种是所谓的“三因素法”，使用这种方法必须掌握P码和C/A码的结构。例如，TI4100接收机就采用这种方法，接收机首先产生P码和C/A码，然后再利用它们来消去输入信号中的P码和C/A码，而留下重建载波信号。另一种方法是所谓的白噪声法，Macrometer接收机就采用这种方法。由于GPS卫星中码调制是采用倒相180°进行相位调制，所以调制后的载波信号为

$$\pm x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

消去负号，重建载波的最简单的方法，就是将接收到的信号平方，即

$$x^2(t) = [A\cos(\omega t + \varphi)]^2 = \frac{A^2}{2} + \frac{A^2}{2}\cos(2\omega t + \varphi') \tag{9-35}$$

采用这种方法，重建载波并不是原来真正的载波信号，它的频率是原来的载波信号频率的两倍。在这种处理方法中，不仅要丢失伪距信号，而且也要丢失导航电文。

9.4.2 观测方法

某一瞬间载波相位测量的观测值指的是该瞬间接收机发出的基准载波信号的相位与接收到的来自卫星的载波信号的相位之差。在下面的讨论中，仍然把依据接收机j的时钟获得的时间记为T_j，把依据卫星i的时钟所获得的时间记为t^i，而把标准的GPS时间记为τ。

接收机在T_j时刻（相应的GPS标准时为τ_b）所发出的信号相位（用周数表示）为

$$\Phi(T_j) = \Phi_0 + F_j T_j = \Phi_0 + F_j\tau_b + F_j(T_j - \tau_b) = F_j\tau_b + \widetilde{\Phi}(T_j) \tag{9-36}$$

式中，Φ_0为$T=0$时载波信号的初相，F_j为信号的频率。$\widetilde{\Phi}(T_j) = \Phi_0 + F_j(T_j - \tau_b)$，可以看成是由于接收机的钟差而造成的信号相位误差。

接收机在T_j时刻所接收到的来自卫星i的载波相位，显然应该和卫星在t^i时刻发出的相位相同，所以t^i和T_j应满足下列关系式：

$$\begin{aligned} t^i &= \tau_a + (t^i - \tau_a) = \tau_a - (\tau_b - \tau_b) + (t^i - \tau_a) = \tau_b - (\tau_b - \tau_a) + (t^i - \tau_a) \\ &= \tau_b - \frac{1}{c}[\rho_j^i - (\delta\rho_j^i)_{ion} - (\delta\rho_j^i)_{trop}] + (t^i - \tau_a) \end{aligned} \tag{9-37}$$

式中，ρ_j^i是接收机j至卫星i的几何距离，$\frac{1}{c}[\rho_j^i-(\delta\rho_j^i)_{ion}-(\delta\rho_j^i)_{trop}]$为信号从卫星传播至接收机所需的时间。卫星$i$在$t^i$时刻发出的载波信号的相位为

$$\varphi(t^i)=\varphi_0+f^i t^i=\varphi_0+f^i\tau_b-\frac{f^i}{c}\rho_j^i+\frac{f^i}{c}[(\delta\rho_j^i)_{ion}$$

$$+(\delta\rho_j^i)_{trop}]+f^j(t^i-\tau_a)=f^i\tau_b-\frac{f^i}{c}\rho_j^i$$

$$+\frac{f^i}{c}[(\delta\rho_j^i)_{ion}+(\delta\rho_j^i)_{trop}]+\tilde{\varphi}(t^i) \tag{9-38}$$

式中，φ_0为$t=0$时信号的初相，f^i为卫星信号频率。$\tilde{\varphi}(t^i)=\varphi_0+f^i(t^i-\tau_a)$可以看成是由于卫星钟差引起的信号相位误差。于是可得载波相位测量的观测值为

$$\varphi_j^i=\Phi(T_j)-\varphi(t^i)=(F_j-f^i)\tau_b+\frac{f^i}{c}\rho_j^i-$$

$$-\frac{f^i}{c}[(\delta\rho_j^i)_{ion}+(\delta\rho_j^i)_{trop}]+\tilde{\Phi}(T_j)-\tilde{\varphi}(t^i) \tag{9-39}$$

上式中F_j和f^i的理论值F^0和f^0是相同的，但实际上F_j和f^i不会严格相等。令$F_j=F^0+\delta F_j$，$f^i=f^0+\delta f^i$。所以，$(F_j-f^i)\tau_b=(\delta F_j-\delta f^i)\tau_b$可以认为是由于接收机钟和卫星钟的相对钟速而引起的载波相位测量的误差。而$\tilde{\Phi}(T_j)-\tilde{\varphi}(t^i)$如前所述则是由于接收机钟和卫星钟的相对钟差而引起的载波相位测量的误差。

式(9-39)中的φ_j^i包含N_j^i个整波长和不足一个波长的部份$\tilde{\varphi}_j^i$(用周数为单位)，即$\varphi_j^i=N_j^i+\tilde{\varphi}_j^i$。但遗憾的是相位测量只能测出不足一个整波长的部分，而无法测出整波长数N_j^i，所以实际上载波相位测量的观测值是

$$\tilde{\varphi}_j^i=\varphi_j^i-N_j^i \tag{9-40}$$

因而载波相位测量的观测方程最后可写为

$$\tilde{\varphi}_j^i=\frac{f^i}{c}\rho_j^i-\frac{f^i}{c}[(\delta\rho_j^i)_{ion}+(\delta\rho_j^i)_{trop}]+(\delta F_j-\delta f^i)\tau_b$$

$$+\tilde{\Phi}(T_j)-\tilde{\varphi}(t^i)-N_j^i \tag{9-41}$$

9.4.3 求差相位测量

在载波相位测量中，相位测量本身可以达到极高的精度。如前所述，L_1信号的相位测量精度约为3～5mm，L_2信号的相位测量精度约为3～7mm。若仍然采用原来的定位模型，那么由于载波相位测量改正后的残余误差，以及接收机时钟和卫星钟改正后的残余误差等因素的影响，定位结果的精度将大大降低，而与相位测量的精度不相适应。因而我们希望能找到一种合适的数学模型，以尽可能地消除上述误差的影响，获得尽可能精确的结果。这就是相位测量中广泛采用的求差法模型，其基本思路和联测定位的基本思想十分相似，下面具体加以介绍。

一、一次差模型

如果在测站 j 和 k 上，同时对卫星 i 在 t^i 瞬间发出的信号进行载波相位测量，得到观测值 $\tilde{\varphi}_j^i$ 和 $\tilde{\varphi}_k^i$，并把两个测站的相位观测值之差 $\Delta\varphi_{jk}^i=\tilde{\varphi}_k^i-\tilde{\varphi}_j^i$ 作为观测值，则有

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi_{jk}^i=&\frac{f^i}{c}(\rho_k^i-\rho_j^i)-\frac{f^i}{c}\{[(\delta\rho_k^i)_{ion}-(\delta\rho_j^i)_{ion}]+[(\delta\rho_k^i)_{trop}\\
&-(\delta\rho_j^i)_{trop}]\}+(\delta F_k-\delta F_j)\tau_b+[\tilde{\Phi}(T_k)-\tilde{\Phi}(T_j)]\\
&-(N_k^i-N_j^i)=\frac{f^i}{c}\Delta\rho^i-\frac{f^i}{c}[(\delta\rho_{jk}^i)_{ion}+(\delta\rho_{jk}^i)_{trop}]\\
&+(\delta F_k-\delta F_j)\tau_b+\Delta\Phi_{jk}-N_{jk}^i
\end{aligned}
\tag{9-42}
$$

式中

$$\Delta\rho^i=\rho_k^i-\rho_j^i;$$

$$(\delta\rho_{jk}^i)_{\substack{ion\\(trop)}}=(\delta\rho_k^i)_{\substack{ion\\(trop)}}-(\delta\rho_j^i)_{\substack{ion\\(trop)}};$$

$$\Delta\tilde{\Phi}=\tilde{\Phi}(T_k)-\tilde{\Phi}(T_j);$$

$$N_{jk}^i=N_k^i-N_j^i。$$

从式(9-42)可以看出，由于测站 j、k 对同一个卫星信号进行了观测，因而在相位差 $\Delta\varphi_{jk}^i$ 中，由于卫星钟钟差和钟速的误差而产生的相位误差 $\tilde{\varphi}(t^i)$ 和 $\delta f^i\tau_b$ 已自行抵消。原来的大气折射改正项已由两站的大气折射改正之差所取代。当两个测站相距不太远时，由于大气折射改正后的残余误差的相关性，此项误差比原来的误差要显著地减小。从下面的计算还可以看出，卫星星历误差的影响也将大大减小。这种情况和子午卫星多普勒测量中的联测定位是十分类似的。我们把这种方法称为一次差载波相位测量。

二、二次差模型

如果在测站 j、k 上不但对卫星 i 进行载波相位测量，而且同时对卫星 $i+1$ 也进行了载波相位测量，分别求得了 $\Delta\varphi_{jk}^i$ 和 $\Delta\varphi_{jk}^{i+1}$，并把这两个相位差作为观测值再求差，则有

$$
\begin{aligned}
\Delta\varphi_{jk}^{i,i+1}=\Delta\varphi_{jk}^{i+1}-\Delta\varphi_{jk}^i=&\frac{f^{i+1}}{c}\Delta\rho^{i+1}-\frac{f^i}{c}\Delta\rho^i-\\
&-\frac{f^{i+1}}{c}[(\delta\rho_{jk}^{i+1})_{ion}+(\delta\rho_{jk}^{i+1})_{trop}]\\
&+\frac{f^i}{c}[(\delta\rho_{jk}^i)_{ion}+(\delta\rho_{jk}^i)_{trop}]-(N_{jk}^{i+1}-N_{jk}^i)
\end{aligned}
\tag{9-43}
$$

我们把这种方法称为二次差载波相位测量法。采用这种方法不但可以消除卫星钟的误差影响，而且还可消除接收机时钟对相位差的影响 $(\delta F_k-\delta F_j)\tau_b$ 和 $\Delta\Phi_{jk}$。目前大多数处理载波相位测量资料的软件均采用这种模型。如果在 j、k 两个测站上同时对三颗卫星 i，$i+1$，$i+2$ 进行了载波相位测量，可以组成两个二次差观测值 $\Delta\varphi_{jk}^{i,i+1}$ 和 $\Delta\varphi_{jk}^{i+1,i+2}$。从理论上讲这两个观测值是相关观测值，可以采用一个适当的权矩阵来表示其相关特性。然而实际上，即使忽略这些观测值之间的相关性也能获得极好的结果。

三、三次差模型

如果j、k两个测站在两个不同的时刻t_1和t_2都对卫星i和$i+1$进行载波相位测量，分别求得了两个不同时刻的二次差相位测量观测值$(\Delta\varphi_{j,k}^{i,i+1})$和$(\Delta\varphi_{j,k}^{i,i+1})_2$，并取它们的差作为观测值，可得

$$\Delta\varphi''' = (\Delta\varphi_{j,k}^{i,i+1})_2 - (\Delta\varphi_{j,k}^{i,i+1})_1 = \Big\{\frac{f_{i+1}}{c}\Delta\rho^{i+1} - \frac{f_i}{c}\Delta\rho^i$$

$$-\frac{f^{i+1}}{c}[(\delta\rho_{j,k}^{i+1})_{ion} + (\delta\rho_{j,k}^{i+1})_{trop}] + \frac{f^i}{c}[(\delta\rho_{j,k}^i)_{ion}$$

$$+(\delta\rho_{j,k}^i)_{trop}]\Big\}_2 - \Big\{\frac{f_{i+1}}{c}\Delta\rho^{i+1} - \frac{f^i}{c}\Delta\rho^i$$

$$-\frac{f^{i+1}}{c}[(\delta\rho_{j,k}^{i+1})_{ion} + (\delta\rho_{j,k}^{i+1})_{trop}] + \frac{f^i}{c}[(\delta\rho_{j,k}^i)_{ion}$$

$$+(\delta\rho_{j,k}^i)_{trop}]\Big\}_1 - \{[(N_{j,k}^{i+1}) - (N_{j,k}^i)]_2 - [(N_{j,k}^{i+1}) - (N_{j,k}^i)]_1\} \quad (9\text{-}44)$$

上式最后一项为

$$[(N_{j,k}^{i+1}) - (N_{j,k}^i)]_2 - [(N_{j,k}^{i+1}) - (N_{j,k}^i)]_1 = [N_k^{i+1} - N_j^{i+1}$$

$$- N_k^i + N_j^i]_2 - [N_k^{i+1} - N_j^{i+1} - N_k^i + N_j^i]_1$$

$$= [(N_k^{i+1})_2 - (N_k^{i+1})_1] + [(N_j^i)_2 - (N_j^i)_1]$$

$$- [(N_j^{i+1})_2 - (N_j^{i+1})_1] - [(N_k^i)_2 - (N_k^i)_1]$$

上式方括号中的项为t_2和t_1两时刻卫星至测站的载波整波段数之差，虽然在两个时刻卫星至测站的整波段数均为未知，但其差数却是可以求得的。有的仪器只要跟踪上卫星后即能自动记录下两个观测时刻间的整波段数之差。所以采用三次差模型后就有可能解决载波相位测量中的不确定性问题。

四、观测方程

下面进一步讨论在一次差和二次差模型中，$\Delta\rho^i = \rho_k^i - \rho_j^i$及$\Delta\rho^{i+1} = \rho_k^{i+1} - \rho_j^{i+1}$与基线向量$\vec{b} = \vec{R}_j - \vec{R}_k$之间的关系。在图9-5中，$\vec{u}_j^i$、$\vec{u}_k^i$分别为测站$j$、$k$至卫星$i$的单位向量，$\vec{\Delta u^i} = \vec{u}_k^i - \vec{u}_j^i$，卫星$i$至测站$j$、$k$的张角为$\omega_i$。由图可求得以下关系：

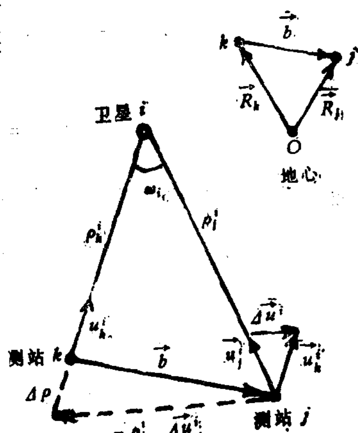


图 9-5

$$\vec{b} - \rho_j^i\vec{\Delta u^i} = -\Delta\rho^i\vec{u}_k^i \quad (9\text{-}45)$$

用$\vec{u}_m^i = \frac{1}{2}(\vec{u}_j^i + \vec{u}_k^i)$同乘等式两边，得

$$\vec{u}_m^i\vec{b} - \vec{u}_m^i\vec{\Delta u^i}\rho_j^i = -\vec{u}_m^i\vec{u}_k^i\Delta\rho^i \quad (9\text{-}46)$$

上式中

$$\vec{u}_m^i\cdot\vec{\Delta u^i} = \frac{1}{2}(\vec{u}_k^i + \vec{u}_j^i)(\vec{u}_k^i - \vec{u}_j^i) = \frac{1}{2}(\vec{u}_k^i\cdot\vec{u}_k^i - \vec{u}_j^i\vec{u}_j^i)$$

$$=\frac{1}{2}(1-1)=0$$

而

$$\vec{u}_m^i\cdot\vec{u}_k^i=\frac{1}{2}(\vec{u}_k^i+\vec{u}_j^i)\vec{u}_k^i=\frac{1}{2}(\vec{u}_k^i\cdot\vec{u}_k^i+\vec{u}_k^i\vec{u}_j^i)$$

$$=\frac{1}{2}(1+\cos\omega_i)=\cos^2\frac{\omega_i}{2}$$

因而基线向量$\vec{b}$和距离差$\Delta\rho^i$之间存在下列简单的关系：

$$\vec{u}_m^i\cdot\vec{b}=-\cos^2\frac{\omega_i}{2}\Delta\rho^i \tag{9-47}$$

这个关系式是由 Bossler 于 1981 年导出的。将(9-47)代入(9-42)式，即可得一次差载波相位测量的观测方程为

$$\Delta\varphi_{jk}^i=-\frac{f^i}{c}\sec^2\frac{\omega_i}{2}\vec{u}_m^i\vec{b}-\frac{f^i}{c}[(\delta\rho_{jk}^i)_{ion}+(\delta\rho_{jk}^i)_{trop}]$$

$$+(\delta F_k-\delta F_j)\tau_b+\Delta\Phi_{jk}-N_{jk}^i \tag{9-48}$$

由(9-47)式又有

$$\Delta\rho^{i+1}-\Delta\rho^i=-\sec^2\frac{\omega_{i+1}}{2}\vec{u}_m^{i+1}\cdot\vec{b}+\sec^2\frac{\omega_i}{2}\vec{u}_m^i\cdot\vec{b}$$

$$=\left(\sec^2\frac{\omega_i}{2}\vec{u}_m^i-\sec^2\frac{\omega_{i+1}}{2}\vec{u}_m^{i+1}\right)\vec{b} \tag{9-49}$$

故由式(9-43)得二次差载波相位测量的观测方程为

$$\Delta\varphi_{jk}^{i,i+1}=\left\{\frac{f^i}{c}\sec^2\frac{\omega_i}{2}\vec{u}_m^i-\frac{f^{i+1}}{c}\sec^2\frac{\omega_{i+1}}{2}\vec{u}_m^{i+1}\right\}\vec{b}$$

$$+\frac{f^i}{c}[(\delta\rho_{jk}^i)_{ion}+(\delta\rho_{jk}^i)_{trop}]-\frac{f^{i+1}}{c}[(\delta\rho_{jk}^{i+1})_{ion}$$

$$+(\delta\rho_{jk}^{i+1})_{trop}]-N_{jk}^{i,i+1} \tag{9-50}$$

式中，$N_{jk}^{i,i+1}=N_{jk}^{i+1}-N_{jk}^i$。如果基线的长度为100km,要求基线的测定精度为1cm,即基线测定的相对精度为10^{-7}，那么(9-48)式中基线向量$\vec{b}$的系数$-\frac{f^i}{c}\sec^2\frac{\omega_i}{2}\vec{u}_m^i$的相对精度必须优于$10^{-7}$。我们先讨论一下$\sec^2\frac{\omega_i}{2}$的量级是多少，是否可以用1代替它。由于

$$\sec^2\frac{\omega_i}{2}=\frac{1}{1-\sin^2\frac{\omega_i}{2}}\approx1+\sin^2\frac{\omega_i}{2}\approx1+\left(\frac{\omega_i}{2}\right)^2$$

而卫星至测站的典型距离为22000km左右，当基线长度为100km时，$\left(\frac{\omega_i}{2}\right)^2\leqslant5.2$

$\times 10^{-6}$。因而在式中不能把 $\sec^2\frac{\omega_i}{2}$ 近似地看成 1 。但一般只需利用测站和卫星近似坐标就可求得足够精确的 $\sec^2\frac{\omega_i}{2}$ 值。再看 $\vec{u_m^i}=\frac{1}{2}(\vec{u_j^i}+\vec{u_k^i})$，显然测站和卫星的位置误差会给 $\vec{u_j^i}$ 和 $\vec{u_k^i}$ 带来误差，为了保证 $\vec{u_m^i}$ 至少有 10^{-7} 的相对精度，要求卫星的位置误差和测站的位置误差只能在 1m 左右。这就要求卫星的星历必须有足够的精度，而测站坐标则需要迭代才能解决，因为开始时不可能提供精度为 1 米的测站近似坐标。从以上讨论可以看出，在求差载波相位测量中(或干涉测量中)，当卫星星历有误差 σ 时，会使 $\vec{u_m^i}$ 产生 $\frac{\sigma}{\rho}$ 的相对误差，而这一相对误差又会使基线向量 $\vec{b}$ 产生同样的相对误差，即 $\frac{\sigma}{\rho}\approx\frac{db}{b}$，或写为

$$db\approx\frac{b}{\rho}\sigma \tag{9-51}$$

如果要求卫星星历误差对基线影响小于 1cm 的话，那么当基线长度为表 9-3 中第一行的数值时，星历误差 σ 必须小于表 9-3 中第二行的数值(计算时，ρ 取 2.2 万 km)。

表 9-3

b	1km	10km	50km	100km	500km	1000km	2500km
σ	220m	22m	4.4m	2.2m	0.44m	0.22m	0.088m

9.4.4 平差方法及计算程序

GPS 卫星精密大地定位是以站间基线为基础的，即先平差计算基线，然后联成网再平差。这样，不仅全网的多余观测和闭合差多了，还可由此发现野外观测的错误。全网解也比单个基线解的精度高。

一般有以下几种平差处理方法：

（1）先平差单个基线，然后联成网用方差-协方差阵进行严密平差；

（2）将所有同步观测站合在一起进行多站平差；

（3）将几个小网合起来进行严密平差。

目前，大多数制造用于大地测量的 GPS 接收机的厂家都可随接收机提供平差处理软件，但差不多都是基线处理程序，已有十多种进入市场。但这些软件的详细数学模型和参数计算方法用户难以知道，而且有些软件还需要专用的硬件来执行。

为 GPS 的科学研究和生产应用而研制的通用平差程序也已有了好几种，比较著名的有：

1. 求差(差分)定位程序(DIPOP)

DIPOP (Differential Positioning Program) 程序是加拿大新不伦斯威克大学根据几年研究 GPS 定位的经验为加拿大大地测量局研制的。整个程序包括三个部分：预处理、

主处理和后处理。

预处理是为不同类型接收机设计的，目前主要用于美国生产的两种接收机：Macrometer V1000 和 TI4100。TI4100 机是用载波相位和码相位测量的。预处理程序运行分两步，第一步包括以下内容：

（1）读入观测数据

（2）使接收机钟与 GPS 时间近似同步

（3）合理取舍控制

（4）形成伪观测值

（5）计算载波相位差

（6）计算卫星钟改正

（7）计算卫星位置和速度

（8）计算伪距

第二步，对所有成对同步观测的测站计算基线。

主处理，主要是完成序贯平差。其中还包括进行电离层和对流层(用霍氏模型)改正，将N作为参数，求出与它最接近的整数，然后再平差一次。这是对于短基线（约 15km）的算法，对于较长的基线，就将算出的N当作真实数字来用。

后处理，是将全网和单个基线的计算结果用数字和图形表示出来。

这个程序包中还包含一个卫星轨道改进计算的程序。

2． 伯尔尼 GPS 定位程序

这个程序也是差分定位程序，是瑞士伯尔尼大学和加拿大新不伦斯威克大学合作研究的，因此很象 DIPOP。

第二代程序是伯尔尼大学自己研制的，整个程序包包括预处理、轨道计算和参数估计三部分。

这个程序是用 FORTRAN-77 写的，在 IBM3033 机上运行。参数估计程序既可用于求差定位，也可单用于测定轨道的计算，或者二者结合的计算。

观测值组成采用二次差法，对一期作业的全部观测数据可以同时处理，这样可以使多台接收机作业后很快得出全网解。

这个程序包中的轨道计算方法是卫星轨道的严密解，因而受到人们重视。

3． 相位处理程序(PHASAR)

PHASAR(Phase Reduction)程序是美国国家大地测量局研究的，它的特点是不用单个基线方法，使多站多期载波相位观测成果一起严密处理。

4． 汉诺威 GPS 定位程序(TIPOSIT，GEONAP)

这是联邦德国汉诺威大学研究的两个程序包，其中 TIPOSIT 专用于 TI4100 接收机，因而利用了P码接收机的优越性，另一个程序包 GEONAP 则是通用的。

TIPOSIT 程序是目前处理 TI4100机观测成果的最优设计，并且可在台式计算机上运行，但它只适于处理较短的基线。求解不确定值N时是用码相位和载波相位相结合的办法(这是考虑到两种相位通过电离层时传播特性不同，码相位滞后，载波相位超前)，还由

L_1和 L_2的线性组合形成一个附加波长。

这种做法的优点是可以用不到 1 分钟观测的数据就能解出N值，而且不受轨道误差和信号传播改正的影响。

为了处理更长的站间基线，可以用第二个程序包 GEONAP (Geodetic NAVSTAR Positioning)，它和前一个程序包有一些部分相同，但另有一些有独特功能程序。例如可以平滑卫星轨道根数新旧注入值之间的跳变，对于处理单频观测时有备用的电离层模型等。此外，这个程序包不是采用求差计算，而是对各种可能的误差模拟计算并加以改正。

第III篇　动力测地

第十章　摄动理论在卫星大地测量中的应用

§10.1　动力卫星大地测量的内容和方法

我们在第I篇总论中已经讲过(参阅§1.4和§2.10)，大地测量研究地球，概括地说，一是研究地球的几何特性(利用精密点位测量成果)，二是研究地球的物理特性（利用重力场测定成果），两者应是密切配合的。用不同的卫星测量方法获得的资料可以分别或者同时满足这两方面研究的需要，因而有几何卫星大地测量（或几何法）和动力卫星大地测量（或动力法）这样的划分。确切与否，姑且不论，但至少有助于明确各自的性质和任务。几何卫星大地测量的原理已在第II篇讲过，而动力卫星大地测量则是本篇要讨论的问题。

1．由力学可知，利用数学为工具，研究物体（或质点）受力作用后位置改变的运动状态而不讨论其原因与效果，称为运动学；兼论运动状态及其原因效果，也就是要考虑力的性质、大小和变化，则称为动力学。

回顾第三章，我们已初步知道，人造卫星在地球引力场中的运动是受着许多力支配的，除了占主导地位的中心体地球的引力之外，还有许多其他的摄动力，而且由于地球不是质点，卫星也不是在中心力场中运动，因而是一种复杂的受摄运动。如果知道所有作用力的性质、大小和变化，根据动力学理论，就能知道卫星的运动状态；反之，若能跟踪观测出卫星的运动状态及其变化，便可推知运动所在引力场的分布情况，进而推知引力中心体的物理特性，这正是动力卫星大地测量所要解决的问题。

研究自然界天体（特别是太阳系行星和卫星）运动的动力学规律有专门的学科——天体力学。

但是我们在第三章提到过，在n体动力学问题中，除$n=2$外，都难以甚至不可能求解，因而不得不采取许多简化办法。历史上许多科学家根据所研究问题涉及的天体质量大小、相距远近、中心体引力的大小、摄动体引力的大小，以及受摄天体所受摄动力与中心引力的比值大小，分别建立了行星运动理论，月球运动理论，等等。对于人造天体，如§3.1所述，有着与自然天体不同的一些特点，因而它的运动所表现的动力学效果与行星或月球虽有类似但不完全相同。研究人造卫星（特别是近地人造卫星）运动的理论既可用行星运动理论为基础，也可用月球运动理论作基础。不妨说，它是介乎这两者之间的理论。

如果从摄动力大小的意义上简单分析一下这三者之间的不同，可能更明显些。在n体行星运动问题中，由于施摄行星之间的距离和方向随着绕太阳运动有较大的变化，因而摄动力的大小和方向也会有较大变化。不过若将摄动力与太阳引力相比，则一般都很小。例

如，作用于地球的摄动力，最大的是木星摄动力，约为太阳对地球引力的 6×10^{-5}，作用于土星的摄动力最大的也是木星的摄动力，约为太阳对土星引力的 4×10^{-3}，这就比地球受的摄动力大多了，因而土星绕太阳的运动比地球复杂得多，在某种程度上说，类似于月球绕地球运动的复杂性。

如果讨论月球运动限于地-月-日这样的动力学系统，则月球受地球引力作用，又受到太阳的摄动力。令 k^2 为引力常数，R 为日地平均距离，r 为月地平均距离，m 为地球质量，以太阳质量为单位，则地球受太阳引力产生的径向加速度为 $-k^2/R^2$，地球与月球的日心径向加速度之差约为 $2k^2r/R^3$，而月球的地心径向加速度为 $-mk^2/r^2$。因此，月球受太阳的摄动力与地球对月球的引力之比为 $\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^3$，约为 1×10^{-2}。由于有这样大的摄动力，所以用行星运动理论来研究月球运动难以得出精确结果。为了克服这个困难，有许多学者专门研究过月球运动的动力学理论，比较著名的有希尔(G.W.Hill)、勃朗(E.W.Brown)、德洛纳(C.E.Delaunay)和亚当斯(J.C.Adams)等人，其中希尔-勃朗的月球理论一直用到现在。

再看人造地球卫星的情况。如果人造卫星离地球有月球那样远，当然它的引力运动也会象月球那样复杂，但若近到离地球表面的平均高度在1000km以内，情况就简单得多。这时太阳的摄动作用很小，用 $\left(\frac{2}{m}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^3$ 表示，约为 8×10^{-8}，而月球的摄动作用约为地球对人造卫星引力的 1.2×10^{-7}，包含的周期项其系数也仅为 0.02″，再顾及地球的非球形部分的摄动，约为地球引力的 1/600，也仅相当于太阳对月球摄动力的 1/6。因此，近地人造卫星所受的引力摄动，总的说来，小于月球所受的摄动而又略大于行星间的最大摄动。所以说研究人造卫星的运动以行星运动理论或月球运动理论为基础，原则上都可以。但是人造的运动毕竟有不同于月球或其它行星的特点，例如：它自身的质量相对地很小，可以不计；影响它运动的因素较多，除了引力性质的因素之外，还有非引力性质的因素，等等。影响人造卫星运动的因素可以大致作如下的分类：

引力性质的因素有：地球引力位；日、月引力；地球潮汐；大气层引力；相对论效应；以及由于地球的岁差章动运动而引起的地球外部位的变化。

非引力性质的因素有：大气阻力；光压(包括各种形式的太阳辐射)；太阳辐射地球后的再辐射效应，以及对于有显著静电荷的卫星产生的电磁效应。

当然，以上这些因素并不是对所有人造卫星都要考虑，要根据具体情况决定取舍。对于应当考虑的那些因素，在处理方法上也可能有所不同，有的需要预先计算其影响，有的则可在求解卫星的轨道运动方程时一并考虑。此外，有些非引力性质的因素所起的作用可能类似于引力性质的因素。

2. 动力卫星大地测量的主要内容是研究地球引力场，求定大地水准面特征、重力异常以及大地基本参数，进而解决若干大地测量上的理论问题和应用问题。研究的方法主要是利用卫星运动的摄动理论，将地面对卫星的观测值与根据摄动理论求得的计算值比较，组成改正数方程，用最小二乘法求解，算出卫星轨道根数的改正数、测站坐标的改正数、

以及地球引力位动力参数的改正数，最后还要联合地面重力测量资料，才能高精度地解决上述问题。

这里先简要说明一下动力法的基本思想。回顾第二章§2.2，我们曾写出卫星大地测量的基本关系式（参见（2-1）式和图 2-2），并曾指出这个关系式无论是解决几何性质问题或是动力性质问题都适用。现在换用一些符号将该式重写如下：

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{\rho} \tag{10-1}$$

式中 $\vec{r}_1$——由测站对卫星的观测值求出的卫星的站心矢量；

$\vec{r}$——根据轨道根数和卫星受摄运动理论事先算出的相应于观测时刻卫星的地心矢量；

$\vec{\rho}$——测站的地心矢量。

微分(10-1)式，并写成有限增量形式，得

$$\Delta\vec{r}_1 = \Delta\vec{r} - \Delta\vec{\rho} \tag{10-2}$$

再将 $\Delta\vec{r}_1$定义为

$$\Delta\vec{r}_1 = \vec{r}'_{ob} - \vec{r}'_{oa} \tag{10-3}$$

式中，

$\vec{r}'_{ob}$——卫星的站心观测矢量；

$\vec{r}'_{oa}$——卫星的站心计算矢量，根据卫星的地心坐标和测站坐标计算而得。

于是(10-2)式成为

$$\vec{r}'_{ob} - \vec{r}'_{oa} = \Delta\vec{r} - \Delta\vec{\rho} \tag{10-4}$$

式中，$\Delta\vec{r}$是卫星地心矢量的改正，通常定义它包含对初始时刻轨道根数的改正以及地球引力位摄动参数的改正，$\Delta\vec{\rho}$是对测站地心矢量的改正。

若将改正数方程(10-4)式改写成一般形式，可写为：

$$\boldsymbol{q}_{ob} - \boldsymbol{q}_{oa} = \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{E}_0} d\boldsymbol{E}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho} + \frac{\partial \boldsymbol{q}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\boldsymbol{\sigma} \tag{10-5}$$

式中的 $\boldsymbol{E}_0$是初始时刻的轨道根数矢量，表示所有根数。$\boldsymbol{\rho}$ 是测站位置矢量，包含所有参与观测的测站矢量。$\boldsymbol{\sigma}$ 是地球引力位摄动参数矢量。$d\boldsymbol{E}_0$、$d\boldsymbol{\rho}$、$d\boldsymbol{\sigma}$ 是相应矢量的改正，其系数是矩阵。$\boldsymbol{q}$ 是表示卫星空间位置的广义坐标。

这个(10-5)式就是动力卫星大地测量的基本方程。解决所有前述动力学问题都从此式出发，但是要具体计算必须首先研究卫星的轨道摄动，同时还要考虑用怎样精度的计算摄动方法才能对应于目前最好的观测精度。这个问题包括选择理论公式和确定计算方法两个方面，而且无论是利用行星理论或月球理论的公式，都要根据不同的卫星和大地测量问题的特点作一些数学上的处理。计算方法有解析法和数值法之分，各有优缺点。在动力卫星大地测量中，这两种方法都有用处，比较而言，在广泛使用大型电子计算机的今天，数值法的优点越来越受到重视，特别是用它能顺利求得适应大地测量需要的高精度结果。

§ 10.2 受摄运动微分方程

10.2.1 拉格朗日方程

设有N个质点的质点系，任一质点的空间直角坐标为x_i、y_i、z_i(其中$i=1, 2, \cdots, N$)，而这些直角坐标是n个独立变量q_j或者还包括时间t的函数($j=1, 2, \cdots, n$)，且单值连续可导，即

$$\vec{q}=\vec{q}(\vec{r}, t) \tag{10-6}$$

式中$\vec{r}$是由直角坐标表示的矢量，t是时间，在函数中可能包含也可能不包含，$\vec{q}$是由各q表示的矢量，称为广义坐标矢量，而q则称为广义坐标。

设一质点(质量为m)位于点(x、y、z)处，其坐标x的时间导数为(y及z类似)：

$$\dot{x}=\sum_1^n \frac{\partial x}{\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial x}{\partial t} \qquad (s=1, 2, \cdots, n)$$

则

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}_r}=\frac{\partial x}{\partial q_r} \qquad (r=j)$$

于是

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\frac{m}{2}\dot{x}^2=m\frac{d}{dt}\left(\dot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}\right)=m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}=m\dot{x}\frac{d}{dt}\frac{\partial x}{\partial q_r}$$

$$=m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}+m\dot{x}\left[\sum_{s=1}^n\frac{\partial^2 x}{\partial q_r\partial q_s}\dot{q}_s+\frac{\partial^2 x}{\partial t\partial q_r}\right]$$

$$=m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_r}+m\dot{x}\frac{\partial \dot{x}}{\partial q_r}$$

因此得

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_r}\frac{m}{2}\dot{x}^2=X\frac{\partial x}{\partial q_r}+\frac{\partial}{\partial q_r}\frac{m}{2}\dot{x}^2$$

式中$X=m\ddot{x}$是作用于m的x轴向的分力。

如果用T表示整个质点系的动能，即

$$T=\frac{1}{2}\sum m_i(\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2+\dot{z}_i^2)$$

则将上面导出的方程对所有坐标和所有质点求和，可得

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r}=\sum_1^N\left[X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_r}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_r}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\right]$$

或简写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_r}=Q_r \qquad (r=1, 2, \cdots, n) \tag{10-7}$$

如果广义坐标q_r增大δq_r，则质点系合力所做的功等于

$$\delta q_r \sum_{i=1}^{n}\left[X_i\frac{\partial x_i}{\partial q_r}+Y_i\frac{\partial y_i}{\partial q_r}+Z_i\frac{\partial z_i}{\partial q_r}\right]=Q_r\delta q_r$$

因此，对于有总位移(δq_1，δq_2，…，δq_n)的情况，质点系合力所做的功为

$$dW=\sum_{r=1}^{n}Q_r\delta q_r$$

求和时可以不计各质点间的引力和斥力，因为这些力不做功，因而dW不变。因此若将作用于质点系的能做功的力称为外力，则$Q_r\delta q_r$就是外力所做的功，但它表示仅使一个广义坐标由q_r变到$q_r+\delta q_r$，其他广义坐标未变。不过在一般情形下Q_r是所有q_j和t的函数。

(10-7)式是拉格朗日方程最一般的动力形式。作用于质点系的力对应于广义坐标q_r的分力Q_r称为广义分力。

如果外力使质点动力系从一种状态变为另一状态所做的功仅与始末状态有关，而与路径无关，即仅与位置和时间有关，而与速度无关，则称这样的力为保守力，引力就是这种力。

因此必定存在函数$U(q_1, q_2, \cdots, q_n)$，称为状态位能。于是

$$Q_r=-(\partial U/\partial q_r)$$

式中U是从q_1，…，q_n状态变为某一标准状态（甚至可以是无穷远）力所做的功，因此若取函数

$$L(q_1, \cdots, q_n; \dot{q}_1, \cdots, \dot{q}_n; t)=T-U \tag{10-8}$$

L称为动力位，则对于保守力系(10-7)式可写为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_r}=0 \qquad (r=1, 2, \cdots, n) \tag{10-9}$$

式中$\dot{q}_r$称为广义速度，$\partial L/\partial \dot{q}_r$称为广义动量(对应于$q_r$)，$\frac{\partial L}{\partial q_r}$则是广义力分量，如果在$L$中不显含坐标$q_s$(即使显含$\dot{q}_s$)，则$q_s$称为循环坐标。由(10-9)式可知，在运动期间$\partial L/\partial \dot{q}_s=\beta_s$是常数。

如果在L中不显含t，则

$$\frac{dL}{dt}=\sum_{r=1}^{n}\left(\ddot{q}_r\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}+\dot{q}_r\frac{\partial L}{\partial q_r}\right)=\sum_{r=1}^{n}\left(\ddot{q}_r\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}+\dot{q}_r\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)$$

$$=\frac{d}{dt}\sum_{r=1}^{n}\left(\dot{q}_r\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}\right)$$

因此

$$\sum_{r=1}^{n}\dot{q}_r\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_r}-L=h \tag{10-10}$$

是常数。显然(10-10)式是广义坐标表示的能量积分，因此拉格朗日方程是牛顿第二定律

推广到具有动力位的力学系统的结果。

质点系的动力位L也称为拉格朗日函数，由(10-8)式可知，它可表示为动能与位能之差。如果讨论引力位，则U应取负号，于是有

$$L=T-(-U)=T+U \tag{10-11}$$

因此对于保守力系，(10-8)和(10-9)式写成一般形式为

$$\left.\begin{aligned} &L=L(\vec{q},\ \dot{\vec{q}},\ t)\\ &\frac{\partial L}{\partial \vec{q}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)=0 \end{aligned}\right\} \tag{10-12}$$

设质量为m的质点的直角坐标为

$$x=q_1,\ y=q_2,\ z=q_3$$

动能 $$T=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \tag{10-13}$$

位能 $$U=U(x,\ y,\ z)$$

则有

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x}=\frac{\partial U}{\partial x}=F_x,\quad \frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial U}{\partial y}=F_y\\ &\frac{\partial L}{\partial z}=\frac{\partial U}{\partial z}=F_z \end{aligned}\right\} \tag{10-14}$$

式中，F_x、F_y、F_z是作用于质点m的分力，于是由(10-12)可得

$$m\ddot{x}=F_x,\quad m\ddot{y}=F_y,\quad m\ddot{z}=F_z \tag{10-15}$$

这便是常见的质点运动方程。

如果讨论的是非保守力系，且$U=0$，则有

$$\frac{\partial T}{\partial \vec{q}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)=\vec{F}_q \tag{10-16}$$

式中$\vec{F}_q$是决定质点系运动的外力。但通常$U\neq 0$，所以拉格朗日方程最一般的形式可写为

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)=\vec{F}_q \tag{10-17}$$

在分析动力学中上式也称为第二类拉格朗日方程。(10-12)、(10-16)、(10-17)式是拉格朗日动力学的基本公式。可以证明，不论置换什么样的广义坐标$\vec{q}$，其式不变。

如果我们把地球、人造卫星、月球、太阳看做一个动力系统来讨论卫星的运动，则这个系统的位能将由在此系统内部起作用的以下引力因素决定，即

$$U=U_E+R_M+R_S+R_A+R_T+R_P \tag{10-18}$$

式中，

U_E——地球引力位；

$R_S R_M$、——日、月引力决定的引力位；

R_A——大气层引力位；

R_T——潮汐位；

R_P——岁差章动引起的位。

由于还有若干外部力对卫星作用，设外力的合力可表示为

$$\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_L + \vec{F}_{re} + \vec{F}_e \tag{10-19}$$

式中，

$\vec{F}$——大气阻力；

$\vec{F}_L$——光压力；

$\vec{F}_{re}$——再辐射力；

$\vec{F}_e$——电磁力。

地球引力位U_E可表示为

$$U_E = fM_E \frac{m}{r} + R_E \tag{10-20}$$

式中，第一项表示由地球质量M_E和卫星质量m构成的质点系的位，其中r表示卫星的地心距离，fM_E是地心引力常数，也可写为$fM_E = \mu$。第二项R_E表示地球引力位摄动函数。对于我们研究的人造卫星，R_E远小于第一项。

(10-18)式第二项以后的各项也同样表示各相应引力的摄动函数。

因此，根据拉格朗日方程(10-17)式，顾及(10-11)、(10-13)、(10-18)、(10-19)、(10-20)各式，可得人造卫星运动的一般方程为

$$\ddot{\vec{r}} + \mu \frac{\vec{r}}{r_3} = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial R_E}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial R_M}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial R_S}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial R_A}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial R_T}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial R_P}{\partial \vec{r}}\right)$$

$$+ \frac{1}{m}(\vec{F}_A + \vec{F}_L + \vec{F}_{re} + \vec{F}_e); \tag{10-21}$$

(10-21)式的具体计算，留待以后讨论。

10.2.2 受摄运动坐标微分方程

设用$L^{(0)}$表示无摄运动轨道决定的拉格朗日函数，用L表示受摄运动轨道决定的拉格朗日函数，用$\vec{F}$表示产生摄动的某个力，则可写出：

$$\left.\begin{aligned} L^{(0)} &= L(\vec{q}^{(0)}, \dot{\vec{q}}^{(0)}) \\ L &= L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}) \\ \vec{F} &= \vec{F}(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t) \end{aligned}\right\} \tag{10-22}$$

式中，$\vec{q}$是受摄运动中的广义坐标，$\vec{q}^{(0)}$是无摄运动中的广义坐标，在这种情况下我们可以把摄动问题归纳为计算以下两种量：

$$\delta\vec{q}=\vec{q}-\vec{q}^{(0)}; \quad \delta\dot{\vec{q}}=\dot{\vec{q}}-\dot{\vec{q}}^{(0)} \tag{10-23}$$

于是按(10-17)式写出相应的拉格朗日方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^{(0)}}{\partial\dot{\vec{q}}}\right)&=\frac{\partial L^{(0)}}{\partial\vec{q}^{(0)}} \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec{q}}}\right)&=\frac{\partial L}{\partial\vec{q}}+\vec{F} \end{aligned}\right\} \tag{10-24}$$

并且认为在所讨论的 n 维空间中，所有变量都连续可导。这里再设 q_j 是 $\vec{q}$ 的第 j 分量，δq_j 是 $\delta\vec{q}$ 的第 j 分量。F_{q_j} 是 $\vec{F}$ 的第 j 分量，其中 $j=1, 2, \cdots\cdots, n$。

将方程(10-24)的第二式展开为 $\delta\vec{q}$，$\delta\dot{\vec{q}}$ 的幂级数，再减去第一式，则对于第 j 分量可得

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D^k}{k!}\left(\frac{\partial L^{(0)}}{\partial\dot{q}_j^{(0)}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{D^k}{k!}\left(\frac{\partial L^{(0)}}{\partial q_j^{(0)}}\right)+F_{q_j} \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{10-25}$$

其中线性微分算子 D 为

$$D=\sum_{s=1}^{n}\left(\delta q_s\frac{\partial}{\partial q_s^{(0)}}+\delta\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s^{(0)}}\right) \tag{10-26}$$

这 n 个(10-25)式组成的微分方程组便可用来计算(10-23)式所表示的摄动量。若取

$$q_1=x, \quad q_2=y, \quad q_3=z$$

则有(参见(10-13)、(10-11)式)

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{m}{2}(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) \\ U&=U(x, y, z) \\ L&=T+U \end{aligned}\right\} \tag{10-27}$$

由此可得如(10-25)式的三个微分方程，等号左边相应为坐标 x、y、z 表示的加速度(参见(10-15)式)。但是这种形式的微分方程积分求解相当复杂，且不易保证精度，因为运动中卫星的坐标随时间变化很快，因此有过好几位天文学家如恩克(Enck)、希尔(Hill)、布罗尔(Brouwer)先后改用受摄坐标相对于开普勒轨道上坐标的微小变化 δx、δy、δz 来替换 x、y、z。这样，三个微分方程的左边便相应变为

$$m\frac{d^2(\delta x)}{dt^2}, \quad m\frac{d^2(\delta y)}{dt^2}, \quad m\frac{d^2(\delta z)}{dt^2}$$

方程右边的拉格朗日偏导数也相应改为

$$\frac{\partial U(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})}{\partial x^{(0)}},$$

$$\frac{\partial U(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})}{\partial y^{(0)}},$$

$$\frac{\partial U(x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)})}{\partial z^{(0)}}$$

于是可将(10-25)式写成

$$\left.\begin{aligned}
m\frac{d^2(\delta x)}{dt^2} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{D^k}{k!}\left(\frac{\partial U^{(0)}}{\partial x^{(0)}}\right)+F_x\\
m\frac{d^2(\delta y)}{dt^2} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{D^k}{k!}\left(\frac{\partial U^{(0)}}{\partial y^{(0)}}\right)+F_y\\
m\frac{d^2(\delta z)}{dt^2} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{D^k}{k!}\left(\frac{\partial U^{(0)}}{\partial z^{(0)}}\right)+F_z
\end{aligned}\right\} \tag{10-28}$$

其中

$$D=\delta x\frac{\partial}{\partial x_0}+\delta y\frac{\partial}{\partial y_0}+\delta z\frac{\partial}{\partial z_0} \tag{10-29}$$

(10-28) 式这样的微分方程是将 (10-25) 式写成地心直角坐标形式得到的，便于按逐次近似法求解。例如在方程右边取 $k=1$，可求得一次近似结果，取到 $k=2$，则得二次近似结果，等等。最后解得的 (δx, δy, δz) 及 ($\delta\dot{x}$, $\delta\dot{y}$, $\delta\dot{z}$) 常称为坐标摄动和速度摄动。由于微分方程的积分问题其主要关键在于恰当进行变量变换，以便使方程的形式更为简单，便于积分。当年恩克的办法是选取开普勒轨道作为近似轨道，用某种无摄和受摄坐标函数来简化方程形式，所得结果被称为恩克方程。希尔的办法是增加一个计算 $r^{(0)}\delta r$ 的补充方程($r^{(0)}$ 是无摄轨道上矢径，δr 是受摄改正)，并且将微分方程右边也用 $r^{(0)}\delta r$ 表示，所得结果称为希尔方程。后来布罗尔为研究人造卫星运动，又将初始位置的轨道面作为 xy 平面，而不取赤道面，这就得出了所谓布罗尔方程(以上所述详见参考文献[41]。

10.2.3 密切根数微分方程

在许多情况下，用密切轨道根数作为基本变量来建立受摄运动微分方程更为适用，因此本节讨论这个问题。

我们在§3.9.1中曾用几何方法解释过密切椭圆轨道，并导出了含有未知摄动加速度的运动微分方程。§3.9.2又就地球扁率及大气阻力产生的摄动加速度情况，用此方程对受摄人卫轨道作了初步分析。由于摄动因素众多，为便于普遍应用，本节将§3.9.1导出的受摄运动微方程变换为含有未知摄动函数微商的形式。现不加推证，给出结果如下：

$$\begin{pmatrix}\dfrac{da}{dt}\\[2mm] \dfrac{de}{dt}\\[2mm] \dfrac{di}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\sqrt{\dfrac{a}{\mu}} & 0 & 0\\[2mm] \dfrac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}} & 0 & -\dfrac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}}\\[2mm] 0 & \dfrac{-\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} & \dfrac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dfrac{\partial R}{\partial M}\\[2mm] \dfrac{\partial R}{\partial \Omega}\\[2mm] \dfrac{\partial R}{\partial \omega}\end{pmatrix}$$

及

$$\begin{pmatrix} \frac{dM}{dt}-n \\ \frac{d\Omega}{dt} \\ \frac{d\omega}{dt} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} & \frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} \\ 0 & -\frac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}} & \frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial a} \\ \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{\partial R}{\partial i} \end{pmatrix} \tag{10-30}$$

这个方程组称为用密切轨道根数表示的拉格朗日运动微分方程。如果我们把头三个方程的系数矩阵用 L 表示，显然后三个方程的系数矩阵是其转置矩阵 L^T。

拉格朗日方程对于描述开普勒根数的受摄变化是方便的，但上述形式主要用于由位函数产生的摄动力这种情况。在一般情况下，对于其他摄动力，仍将该式右边化成摄动加速度分量的形式，但通常是化成沿径向、横向、法向的三个分量，分别用 S，T，W表示。

如果将沿坐标轴 x、y、z 方向的摄动加速度分量表示为

$$X=\frac{\partial R}{\partial x},\quad Y=\frac{\partial R}{\partial y},\quad Z=\frac{\partial R}{\partial z} \tag{10-31}$$

则可写出

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial M,\ a} \\ \frac{\partial R}{\partial \Omega,\ e} \\ \frac{\partial R}{\partial \omega,\ i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial M,\ a} & \frac{\partial y}{\partial M,\ a} & \frac{\partial z}{\partial M,\ a} \\ \frac{\partial x}{\partial \Omega,\ e} & \frac{\partial y}{\partial \Omega,\ e} & \frac{\partial z}{\partial \Omega,\ e} \\ \frac{\partial x}{\partial \omega,\ i} & \frac{\partial y}{\partial \omega,\ i} & \frac{\partial z}{\partial \omega,\ i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial R}{\partial y} \\ \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{10-32}$$

如果令 α、β、γ 为卫星径矢 r 对地心直角坐标轴 x、y、z 的方向余弦，则地心直角坐标与轨道根数的变换关系可写为

$$\begin{aligned} x+\sqrt{-1}\,y &= r(\alpha+\sqrt{-1}\,\beta) = r[\cos u\cdot\exp\sqrt{-1}\cdot\Omega \\ &\quad -\sin u\cos i\cdot\exp\sqrt{-1}\cdot(\Omega-90^\circ)] \\ z &= r\sin u\sin i \end{aligned} \tag{10-33}$$

式中，$u=\omega+v$，v 是真近点角，r 表示为

$$r=\frac{p}{1+e\cos v}\qquad (\text{其中 } p=a(1-e^2))$$

将（10-33）式对时间 t 微分，可得

$$\begin{aligned} \dot{x}+\sqrt{-1}\,\dot{y} &= \dot{r}(\alpha+\sqrt{-1}\,\beta)+r(\dot{\alpha}+\sqrt{-1}\,\dot{\beta}) \\ &= -\sqrt{\frac{\mu}{p}}[(e\sin\omega+\sin u)\exp\sqrt{-1}\cdot\Omega \\ &\quad +(e\cos\omega+\cos u)\cos i\cdot\exp\sqrt{-1}\cdot(\Omega-90^\circ)] \\ \dot{z} &= \sqrt{\frac{\mu}{p}}(e\cos\omega+\cos u)\sin i \end{aligned} \tag{10-34}$$

式（10-33）及（10-34）常用于在受摄运动中根据初始轨道根数计算坐标和速度的初值。

由地心直角坐标系转换为S、T、W坐标系可表示为

$$\begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{10-35}$$

其中

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \quad \beta' = \frac{\partial \beta}{\partial u}, \quad \gamma' = \frac{\partial \gamma}{\partial u} \\ \alpha'' &= \frac{c_1}{c}, \quad \beta'' = \frac{c_2}{c}, \quad \gamma'' = \frac{c_3}{c} \end{aligned} \tag{10-36}$$

上式中的$c = \sqrt{p\mu}$是面积积分常数，c_1、c_2、c_3是其分量。利用（10-33）式，并顾及

$$\frac{\partial}{\partial M} = \frac{\partial v}{\partial M} \frac{\partial}{\partial v} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sqrt{1-e^2} \frac{\partial}{\partial v} \tag{10-37}$$

经矩阵运算后，可由(10-32)、(10-30) 式求出

$$\begin{pmatrix} \dfrac{da}{dt} \\ \dfrac{de}{dt} \\ \dfrac{di}{dt} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \begin{pmatrix} \dfrac{2ea^2 \sin v}{p^2} & \dfrac{2a^2}{r} & 0 \\ \sin v & \cos v + (\cos v + e)\dfrac{r}{p} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{r}{p}\cos(v+\omega) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dM}{dt} - n \\ \dfrac{d\Omega}{dt} \\ \dfrac{d\omega}{dt} \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{p}{\mu}} \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e}\left(\cos v + 2e\dfrac{r}{p}\right) & -\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e} \cdot \left(1+\dfrac{r}{p}\right)\sin v & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{r}{p}\dfrac{\sin(\omega+v)}{\sin i} \\ -\dfrac{\cos v}{e} & \dfrac{\sin v}{e}\cdot\left(1+\dfrac{r}{p}\right) & -\dfrac{r}{p}\cdot\dfrac{\sin(\omega+v)}{\operatorname{tg} i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S \\ T \\ W \end{pmatrix} \tag{10-38}$$

这个形式的方程有时称为牛顿方程，或者牛顿-拉格朗日方程，有的文献上也称为欧拉方程或高斯方程。这个方程适用于计算在任何摄动力作用下轨道根数的受摄变化。

式（10-30）和（10-38）这两种形式的方程是由两组共轭方程组成的。其中a、e、i称为位置根数，M、Ω、ω称为角量根数。此外，由于

$$M = n(t-\tau) = nt - n\tau = nt + M_0$$

$$\frac{dM}{dt}=n+\frac{dM_0}{dt}\tag{10-39}$$

故上述两种方程左边的相应微分可换成$\frac{dM_0}{dt}$。这样，在对（10-30）和（10-38）式积分后，平近点角的无摄值$M_{无}$和受摄值$M_{摄}$的关系可表示为

$$M_{摄}=M_{无}+\delta M_0+\int_{t_0}^{t}\delta n dt\tag{10-40}$$

式中，δM_0是M_0的受摄量，δn是n的受摄量，而δn又取决于半长轴a的受摄量δa，可表示为

$$\delta n=n_0\sum_{k=1}^{\infty}\binom{-\frac{3}{2}}{k}\left(\frac{\delta a}{a_0}\right)^k\quad(|\delta a|\ll a_0)\tag{10-41}$$

式中，n_0及a_0分别是平均运动和半长轴的无摄值。

由于（10-30）和(10-38)式中系数矩阵元素的分母中含有因子e和$\sin i$或$\mathrm{tg}\, i$，当$e\to 0$，$i\to 0$时，这些项会很大，完全等于0或π时，就成为受摄运动方程的奇点。不过在以直角坐标为变量的运动方程中，却并不出现奇点情况，可见这种奇点是由所选变量造成的，可以设法变换变量来避免。

变换变量有过许多不同的做法，而且常常针对$e\to 0$，$i\to 0°$或$i\to 180°$的不同情况采取不同的办法。例如先将近升距ω和平近点角M换成

$$\tilde{\omega}=\omega+\Omega\qquad \varepsilon=\tilde{\omega}+M\tag{10-42}$$

并令

$$\varepsilon_0=\tilde{\omega}+M_0$$

从而求得

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\tilde{\omega}}=\dot{\omega}+\dot{\Omega},\qquad \dot{\varepsilon}=\dot{\tilde{\omega}}+\dot{M}\\&\dot{\varepsilon}_0=\dot{\tilde{\omega}}+\dot{M}_0\end{aligned}\right\}\tag{10-43}$$

再设

$$p=\mathrm{tg}\, i\sin\Omega,\qquad q=\mathrm{tg}\, i\cos\Omega\tag{10-44}$$

因而有

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\sin\Omega}{\cos^2 i}\frac{di}{dt}+\mathrm{tg}\, i\cos\Omega\frac{d\Omega}{dt}$$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{\cos\Omega}{\cos^2 i}\frac{di}{dt}-\mathrm{tg}\, i\sin\Omega\frac{d\Omega}{dt}$$

$$\frac{\partial R}{\partial p}\mathrm{tg}\, i=\cos\Omega\frac{\partial R}{\partial\Omega}+\frac{\partial R}{\partial i}\sin i\cos i\sin\Omega$$

$$\frac{\partial R}{\partial q}\mathrm{tg}\, i=-\sin\Omega\frac{\partial R}{\partial\Omega}+\frac{\partial R}{\partial i}\sin i\cos i\cos\Omega$$

于是

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dp}{dt} &= +\frac{\dfrac{\partial R}{\partial q}}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\cos^3 i} - \frac{p\left(\dfrac{\partial R}{\partial e}+\dfrac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right)}{2na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\cos i\left(\cos\dfrac{i}{2}\right)^2} \\
\frac{dq}{dt} &= -\frac{\dfrac{\partial R}{\partial p}}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\cos^3 i} - \frac{q\left(\dfrac{\partial R}{\partial e}+\dfrac{\partial R}{\partial \tilde{\omega}}\right)}{2na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}}\cos i\left(\cos\dfrac{i}{2}\right)^2}
\end{aligned}\right\} \tag{10-45}
$$

用上式便可换去$\frac{d\Omega}{dt}$和$\frac{di}{dt}$，而不出现分母中的 $\sin i$。上式分母中的 $\cos i$ 及 $2\left(\cos\frac{i}{2}\right)^2$ 还可换成

$$
\frac{1}{\cos i} = (1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\frac{1}{2\left(\cos\dfrac{i}{2}\right)^2} = \frac{1}{1+(1+p^2+q^2)^{-\frac{1}{2}}} \tag{10-46}
$$

以上变换对于 i 很小的情况很有效。但当 $i\to\pi$ 时问题仍然存在，还得用另外的办法。

为了消除 $e\to 0$ 的情况，可设

$$
h = e\sin\tilde{\omega} \qquad k = e\cos\tilde{\omega} \tag{10-47}
$$

则

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dh}{dt} &= \sin\tilde{\omega}\frac{de}{dt} + e\cos\tilde{\omega}\frac{d\tilde{\omega}}{dt} \\
\frac{dk}{dt} &= \cos\tilde{\omega}\frac{de}{dt} - e\sin\tilde{\omega}\frac{d\tilde{\omega}}{dt} \\
\frac{\partial R}{\partial h} &= \sin\tilde{\omega}\frac{\partial R}{\partial e} + \frac{1}{e}\cos\tilde{\omega}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}} \\
\frac{\partial R}{\partial k} &= \cos\tilde{\omega}\frac{\partial R}{\partial e} - \frac{1}{e}\sin\tilde{\omega}\frac{\partial R}{\partial\tilde{\omega}}
\end{aligned}\right\} \tag{10-48}
$$

同样可写出$\frac{dh}{dt}$和$\frac{dk}{dt}$的表示式，用来换去$\frac{de}{dt}$及$\frac{d\Omega}{dt}$。最后式中出现的 $(1-e^2)$ 可用 $(1-h^2-k^2)$ 取代。

为了能同时兼顾小偏心率和小倾角的情况，还可采用类似于德洛纳变量的庞卡莱（H. Poincarc）变量，可分为如下两组：

（1）

$$\left.\begin{aligned} &L=\sqrt{\mu a} \quad \omega_1=-\tilde{\omega} \\ &\varepsilon=l+\tilde{\omega} \quad \omega_2=-\Omega \\ &\rho_1=L(1-\sqrt{1-e^2}) \\ &\rho_2=L\sqrt{1-e^2}\,(1-\cos i) \end{aligned}\right\} \tag{10-49}$$

（2）

$$\left.\begin{aligned} &L=\sqrt{\mu a} \quad \xi_1=\sqrt{2\rho_1}\cos\omega_1 \\ &\varepsilon=l+\tilde{\omega} \quad \xi_2=\sqrt{2\rho_1}\cos\omega_2 \\ &\eta_1=\sqrt{2\rho_1}\sin\omega_1 \\ &\eta_2=\sqrt{2\rho_1}\sin\omega_2 \end{aligned}\right\} \tag{10-50}$$

以上的第（2）组变量对于研究人造卫星在位势力作用下的运动以及消除小偏心率和小倾角产生的奇点很为适用。

§10.3　摄动函数及摄动加速度

10.3.1　月日摄动函数

研究人造卫星运动中由于月日引力产生的摄动，是作为限制四体（地、月、日、卫）问题来考虑的，即认为卫星对前三个天体没有引力作用。而在研究月日摄动函数

$$R_{M,S}=R_M+R_S \tag{10-51}$$

时，又可利用现成的限制三体问题摄动函数。

1. 现在我们用 R_1 表示施摄体月或日决定的摄动函数(以后凡带下标“1”的量都表示相应于施摄体)，则可写出

$$R_1=\mu_1\left(\frac{1}{\Delta}-\frac{r}{r_1}\cos\psi\right) \tag{10-52}$$

其中 $\mu_1=fm_1$，f 是引力常数，m_1 是施摄体质量。r、r_1 分别是卫星和施摄体的地心矢径，而且 $r_1<r_1$。ψ 是 r 和 r_1 形成的地心角，Δ 是卫星和施摄体之间的距离，即

$$\Delta=(r^2+r_1^2-2rr_1\cos\psi)^{\frac{1}{2}} \tag{10-53}$$

于是可将 R_1 用勒让德多项式表示为

$$R_1=\frac{\mu_1}{r_1}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n P_n(\cos\psi) \tag{10-54}$$

我们从这个表示式出发来研究限制三体问题内部的摄动函数。

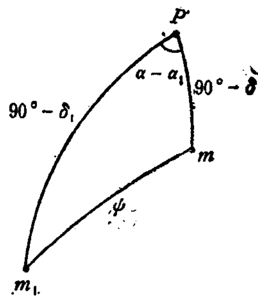


图 10-1

由图 10-1 可知

$$\cos\psi=\sin\delta\sin\delta_1+\cos\delta\cos\delta_1\cos(\alpha-\alpha_1) \quad (10\text{-}55)$$

式中α，δ分别是相应的赤经和赤纬。

按照球函数加法定理，有

$$P_n(\cos\psi)=\sum_{k=0}^{n}(2-\delta_{k,0})\frac{(n-k)!}{(n+k)!}P_{nk}(\sin\delta)P_{nk}(\sin\delta_1)\cdot\cos k(\alpha-\alpha_1) \quad (10\text{-}56)$$

式中克罗内克记号

$$\delta_{k,0}=\begin{matrix}1 & k=0\\ 0, & k\neq 0\end{matrix}$$

将（10-56）式代入（10-54）式，可得

$$R_1=\frac{\mu_1}{a_1}\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{r}{a_1}\right)^n[C^1_{nk}(t)\cos k\alpha+S^1_{nk}(t)\sin k\alpha]\cdot P_{nk}(\sin\delta) \quad (10\text{-}57)$$

式中的系数可以用下面的函数来表示，即

$$\begin{matrix}C^1_{nk}(t)\\ S^1_{nk}(t)\end{matrix}=(2-\delta_{k,0})\frac{(n-k)!}{(n+k)!}\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^{n+1}\cdot P_{nk}(\sin\delta_1)\cdot\begin{matrix}\cos k\alpha_1\\ \sin k\alpha_1\end{matrix} \quad (10\text{-}58)$$

如果不考虑上述系数与时间的关系，则R_1在形式上与地球引力位展开式相似。主要差别是那里的纬度φ和经度λ在这里换成了施摄体的坐标赤纬δ和赤经$\alpha=\lambda+s$，s是$\lambda=0$处的恒星时。但是施摄体的坐标变化比卫星坐标变化要慢得多，例如对于绕地周期为2小时的卫星，月球坐标的变化速度只有它的$\frac{1}{324}$，太阳更慢，是它的$\frac{1}{4380}$。因此，可以将$C^1_{nk}(t)$和$S^1_{nk}(t)$看作是缓慢的时间函数。如果展为三角级数，可以截取相当短的几项代入计算。

现在利用（10-33）式，重写出卫星在天球坐标中的直角坐标与轨道根数的关系式，顾及$x=r\alpha$，$y=r\beta$，$z=r\gamma$，$u=\omega+v$，$\delta=\varphi$，并令

$$w=\Omega+u \quad (10\text{-}59)$$

稍加改变，可得

$$\frac{x}{r}+\sqrt{-1}\,\frac{y}{r}=\exp\sqrt{-1}\cdot\omega+2\left(\sin\frac{i}{2}\right)^2\sin(\omega-\Omega)\cdot\exp\sqrt{-1}\,(\Omega-90°)$$

$$=\cos\varphi\cdot\exp\sqrt{-1}\,(\lambda+s)$$

$$\frac{z}{r}=\sin i\sin(w-\Omega)=\sin\varphi \quad (10\text{-}60)$$

由此可求出

$$\cos^k\delta\exp\sqrt{-1}\,(\pm k\alpha)=\sum_{m=0}^{k}\binom{k}{m}\left(\cos\frac{i}{2}\right)^{2m}\cdot\left(\sin\frac{i}{2}\right)^{2(k-m)}$$

$$\cdot\exp\sqrt{-1}\,[\pm(2m-k)u+k\Omega] \quad (10\text{-}61)$$

式中$\binom{k}{m}=\frac{k!}{m!(k-m)!}$，再经一些变换后，可求得

$$\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^{n+1}\cdot P_{nk}(\sin\delta_1)\exp\sqrt{-1}\,k\alpha_1$$

$$=\frac{2^k\left(\frac{1}{2}\right)_k}{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}\sum_{m_1=0}^{k}\sum_{s_1=0}^{E\left(\frac{n-k}{2}\right)}A_{m_1,s_1}^{nk}(i_1)\cdot\sum_{q_1=0}^{n-k-2s}\binom{n-k-2s_1}{q_1}\sum_{j_1=-\infty}^{+\infty}$$

$$X_{j_1}^{(-n-1),\ (-n+2m_1+2s_1+2q_1)}(e_1)\cdot\exp\sqrt{-1}$$

$$\cdot[j_1M_1+k\Omega_1-(n-2m_1-2s_1-2q_1)\omega_1+(n-k-2s_1-2q_1)90^\circ] \tag{10-62}$$

式中$\Gamma(\ )$是伽马函数，$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{\pi}(2k-1)!}{2^{2k-1}\cdot k!}$；$\left(\frac{1}{2}\right)_k=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\cdots\left(\frac{1}{2}+k-1\right)$；$E\left(\frac{n-k}{2}\right)$表示取到$\frac{n-k}{2}$的最大整数；$X_{\{\ \}}^{(\ ),(\ )}(e_1)$是汉生(Hansen)偏心率函数展开式，$X$是汉生系数，有关上式的推导过程可参阅参考文献[33]。

将(10-62)式代入(10-58)式，即可计算系$C_{nk}^1(t)$和$S_{nk}^1(t)$。若取$n=2$，计算精确到e_1^2量级，其结果可写为

$$C_{20}^1(t)=\left(\frac{3}{4}\sin^2 i_1-\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}\sin^2 i_1\cos(2M_1+2\omega_1)$$

$$+e_1\left[3\left(\frac{3}{4}\sin^2 i_1-\frac{1}{2}\right)\cos M_1+\frac{3}{8}\sin^2 i_1\cos(M_1+2\omega_1)\right.$$

$$\left.-\frac{21}{8}\sin^2 i_1\cos(3M_1+2\omega_1)\right] \tag{10-63}$$

$$\begin{matrix}C_{21}^1(t)\\S_{21}^1(t)\end{matrix}=\frac{1}{2}\sin i_1\left[\pm\cos i_1\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}\Omega_1-\frac{1}{2}(1-\cos i_1)\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2M_1+2\omega_1-\Omega_1)\right.$$

$$\left.\mp\frac{1}{2}(1+\cos i_1)\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2M_1+2\omega_1+\Omega_1)\right]+e_1\left\{\sin i_1(1-\cos i_1)\right.$$

$$\cdot\left[\frac{1}{8}\cdot\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(M_1+2\omega_1-\Omega_1)-\frac{7}{8}\cdot\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(3M_1+2\omega_1+\Omega_1)\right]$$

$$\left.-\frac{6}{8}\sin i_1\cos i_1\cdot\left[\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(M_1-\Omega_1)\mp\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(M_1+\Omega_1)\right]\right\} \tag{10-64}$$

$$\begin{matrix}C_{22}^1(t)\\S_{22}^1(t)\end{matrix}=\frac{1}{8}\sin^2 i_1\cdot\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}2\Omega_1\pm\frac{1}{16}\left[\begin{matrix}(1-\cos i_1+\cos^2 i_1)\\(1-\cos i_1)^2\end{matrix}\right.$$

$$\cdot\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}(2M_1+2\omega_1-2\Omega_1)\mp\begin{matrix}(1-\cos i_1+\cos^2 i_1)\\(1-\cos i_1)^2\end{matrix}$$

$$\left.\cdot\begin{matrix}\cos\\\sin\end{matrix}(2M_1+2\omega_1+2\Omega_1)\right]\mp e_1\begin{matrix}(1-\cos i_1+\cos^2 i_1)\\(1-\cos i_1)^2\end{matrix}$$

$$\cdot\left[\frac{1}{32}\cdot\frac{\cos}{\sin}(M_1+2\omega_1-2\Omega_1)-\frac{7}{32}\cdot\frac{\cos}{\sin}(3M_1+2\omega_1+2\Omega_1)\right]$$

$$-e_1\cdot\frac{(1+\cos i_1+\cos^2 i_1)}{(1+\cos i_1)^2}\cdot\left[\frac{1}{32}\cdot\frac{\cos}{\sin}(M_1+2\omega_1-2\Omega_1)\right.$$

$$\left.-\frac{7}{32}\frac{\cos}{\sin}(3M_1+2\omega_1+2\Omega_1)\right]+\frac{3}{16}e_1\sin^2 i_1$$

$$\cdot\left[\frac{+\cos}{-\sin}(M_1-2\Omega_1)+\frac{\cos}{\sin}(M_1+2\Omega_1)\right] \tag{10-65}$$

然后利用（10-57）式便可分别求得月日摄动函数 R_1 的表示式。

10.8.2 月日摄动函数展开式的数字分析

现在根据(10-57)、(10-58)式以及上节写出的展开式进行具体的数字计算。取 $n=2$，计算精确到施摄体轨道偏心率的平方量级，并且顾及地球和月球轨道根数的平均变化。为了便于实际应用，计算中用到的月球和地球轨道的平黄道根数值取其对应于1980年1月0日 $12^h ET$（历书时），即儒略日

$$t_0'=JD2444239$$

时的数值。

1．月球轨道平黄道根数

（1）月球平黄经 l_M

$$l_M=71.450°+13.1763961°d-0.11333°\times10^{-2}\cdot T^2-0.1888°\times10^{-5}\cdot T^3 \tag{10-66}$$

（2）月轨对黄道的升交点平黄经 Ω_M

$$\Omega_M=151.924°-0.05295̃3888°d+\cdots\cdots \tag{10-67}$$

（3）月轨的平黄道近升距 ω_M

$$\omega_M=197.515°+0.1643579°d+\cdots\cdots \tag{10-68}$$

以上各式中的 d 是从初始时刻 t_0' 起，算到计算时刻 t 的平太阳日数，而 $T=d/36525$。

（4）月轨面对黄道面的倾角 i_M

$$i_M=5.145368° \tag{10-69}$$

（5）月轨偏心率 e_M

$$e_M=0.054900489 \tag{10-70}$$

（6）月球的平均运动(速度) $\tilde{n}_M$

$$\tilde{n}_M=2.661699489\times10^{-6}s^{-1}=13.1763961°d^{-1} \tag{10-71}$$

计算时用到的月球的平近点角 M_M，可以表示为

$$M_M=M_{MO}+(M_M-M_{MO}) \tag{10-72}$$

因为上式中的第二项可以等于（10-66）式的第二项，在给定的精度要求下，含 T^2 及 T^3 的项可略去。上式的第一项可以等于(10-66)、(10-67)、(10-68)三式第一项的组合，即

$$M_{MO}=l_{MO}-(\Omega_{MO}+\omega_{MO}) \tag{10-73}$$

现在再将黄道根数化算为赤道根数。由春分点、月黄升交点、月赤升交点组成的球面三角形，可写出如下关系式。为了区别，用带下标"ME"的的量表示对应于赤道的量，无下标的则表示对应于黄道的量，即

$$\cos i_{ME}=\cos\varepsilon\cos i-\sin\varepsilon\sin i\cos\Omega$$
$$\sin\Omega_{ME}=\sin i\sin\Omega\ \mathrm{cosec}\, i_{ME}$$
$$\sin\Delta\omega=\sin\varepsilon\sin\Omega_{ME}\mathrm{cosec}\, i$$
$$\omega_{ME}=\omega+\Delta\omega \tag{10-74}$$

式中平黄赤交角 ε 在时元 t_0'（即上述 1980 年）时的值为

$$\varepsilon=\varepsilon_{1980}=23°26'30.79''-46.845''T+\cdots\cdots \tag{10-75}$$

式中 T 是 1980 年以后到计算时刻的回归世纪数。

于是可求得(10-63)～(10-65)各式中所需的 t_0' 时的月轨赤道根数：

$$i_{ME1980}=19.048° \quad \text{(不计周期项)}$$
$$\Omega_{ME1980}=172.569°-0.0129443°d+\cdots\cdots$$
$$\omega_{ME1980}=232.523+0.2338716d+\cdots\cdots$$

(10-76)

2． 太阳轨道根数

根数从春分点沿黄道起算，日轨升交点黄经

$$\Omega_s=0$$

日轨对赤道的倾角

$$i_{sE}=\varepsilon \tag{10-77}$$

（其数值等于（10-75）式的结果）

$$M_{sE1980}=356.729°+0.98560023°d+\cdots\cdots$$
$$\omega_{sE1980}=114.974°+0.0047068446°d+\cdots\cdots \tag{10-78}$$

日轨偏心率与地轨相同，即

$$e_{sE}=0.01671760 \tag{10-79}$$

3． 将以上写出的月日赤道根数代入(10-63)～(10-65)式，可得

（1）对于月球

$$C_{20}^{M}(t)=-0.4201175-0.0798825\cos(2M_M+2\omega_M)-0.0691939\cos M_M +0.0021927\cos(M_M+2\omega_M)-0.0153495\cos(3M_M+2\omega_M)$$

(10-80)

$$\begin{matrix}C_{21}^{M}(t)\\S_{21}^{M}(t)\end{matrix}=\pm0.1542447\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}\Omega_M-0.0044673\times\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2M_M+2\omega_M-\Omega_M)$$

$$\mp0.1587121\times\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(2M_M+2\omega_M+\Omega_M)+0.0001226$$

$$\times\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(M_M+2\omega_M-\Omega_M)-0.0008583\begin{matrix}\sin\\\cos\end{matrix}(3M_M+2\omega_M-\Omega_M)$$

$$
\begin{aligned}
&\pm 0.0043566\times\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(M_M+2\omega_M+2\Omega_M)\mp 0.0304968\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\\
&\quad(3M_M+2\omega_M+\Omega_M)-0.0127021\\
&\quad\times\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(M_M-\Omega_M)\pm 0.0127021\times\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(M_M+\Omega_M)
\end{aligned}
\qquad (10\text{-}81)
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{matrix}C^M_{22}(t)\\ S^M_{22}(t)\end{matrix}=&\;0.0133127\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2\Omega_M)\begin{matrix}+0.0592652\\ -0.0001873\end{matrix}\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2M_M+2\omega_M-2\Omega_M)\\
&+\begin{matrix}0.1774210\\ 0.2364988\end{matrix}\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2M_M+2\omega_M+2\Omega_M)\begin{matrix}-0.0016268\\ +0.0000053\end{matrix}\\
&\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(M_M+2\omega_M-2\Omega_M)\begin{matrix}+0.0113879\\ -0.0000359\end{matrix}\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(3M_M+2\omega_M-2\Omega_M)\\
&-\begin{matrix}0.0048702\\ 0.0064919\end{matrix}\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(M_M+2\omega_M+2\Omega_M)+\begin{matrix}0.0340917\\ 0.0454436\end{matrix}\\
&\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(3M_M+2\omega_M+2\Omega_M)\pm 0.0010963\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(M_M-2\Omega_M)\\
&+0.0010963\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(M_M+2\omega_M)
\end{aligned}
\qquad (10\text{-}82)
$$

（2）对于太阳

$$
\begin{aligned}
C^s_{20}(t)=&-0.3813051-0.1186949\cos(2M_s+2\omega_s)\\
&-0.0191235\cos M_s+0.0009921\times\cos(M_M+2\omega_s)\\
&-0.0069447\times\cos(3M_s+2\omega_s)
\end{aligned}
\qquad (10\text{-}83)
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{matrix}C^s_{21}(t)\\ S^s_{21}(t)\end{matrix}=&\begin{matrix}+0-0.1989094\sin\\ -0.1824923+0.1824924\cos\end{matrix}(2M_s+2\omega_s)\\
&\begin{matrix}+0.0016626\sin\\ -0.0015254\cos\end{matrix}(M_s+2\omega_s)+0.0106779\\
&\times\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(3M_s+2\omega_s)\begin{matrix}+0\\ -0.0091522\cos M_s\end{matrix}
\end{aligned}
\qquad (10\text{-}84)
$$

$$
\begin{aligned}
\begin{matrix}C^s_{22}(t)\\ S^s_{22}(t)\end{matrix}=&+\begin{matrix}0.0197824+0.2302174\\ 0\qquad\quad +0.2293660\end{matrix}\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(2M_s+2\omega_s)\\
&-\begin{matrix}0.0019242\\ 0.0019172\end{matrix}\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(M_s+2\omega_s)+\begin{matrix}0.0134694\\ 0.0134204\end{matrix}\\
&\times\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(3M_s+2\omega_s)+\begin{matrix}0.0009920\cos M_s\\ 0\end{matrix}
\end{aligned}
\qquad (10\text{-}85)
$$

以上各式中，振幅均无量纲。

下面再列出周期项的变量表示式，其中频率的量纲为弧度/日，初相以弧度表示。

（1）

$$M_M+2\omega_M=14.215-0.2218078d$$

$$2M_M+2\omega_M=20.314-0.4517792d$$

$$3M_M + 2\omega_M = 26.413 - 0.6817506d$$

（2） $$M_M + 2\Omega_M = 12.123 - 0.2304232d$$

$$M_M - \Omega_M = 3.0870 - 0.22975d$$

$$M_M + \Omega_M = 9.1108 - 0.2301973d$$

$$M_M - 2\Omega_M = 0.0751 - 0.2295196d$$

（3） $$M_M + 2\omega_M - \Omega_M = 11.204 - 0.2215819d$$

$$M_M + 2\omega_M - 2\Omega_M = 8.1916 - 0.2213920d$$

$$M_M + 2\omega_M + \Omega_M = 17.227 - 0.2220337d$$

$$M_M + 2\omega_M + 2\Omega_M = 20.239 - 0.2222236d$$

$$2M_M + 2\omega_M - \Omega_M = 17.302 - 0.4515533d$$

$$2M_M + 2\omega_M - 2\Omega_M = 14.290 - 0.4513634d$$

$$2M_M + 2\omega_M + \Omega_M = 23.326 - 0.4520051d$$

$$2M_M + 2\omega_M + 2\Omega_M = 26.338 - 0.4521950d$$

$$3M_M + 2\omega_M - \Omega_M = 23.401 - 0.6815247d$$

$$3M_M + 2\omega_M - 2\Omega_M = 20.389 - 0.6813948d$$

$$3M_M + 2\omega_M + \Omega_M = 29.425 - 0.6819765d$$

$$3M_M + 2\omega_M + 2\Omega_M = 32.437 - 0.6821664d$$

（4） $$M_\odot = 6.2261 + 0.017201968d$$

$$M_\odot + 2\omega_\odot = 3.9563 + 0.0173661d$$

$$2M_\odot + 2\omega_\odot = 3.8992 + 0.0345681d$$

$$3M_\odot + 2\omega_\odot = 3.8421 + 0.051771d \qquad (10\text{-}86)$$

4. 对于大多数近地卫星来说，月日摄动计算到$C_{22}^{M,\odot}$，$S_{22}^{M,\odot}$完全够用了，甚至在限定的时间范围内还可舍去与施摄体轨道偏心率成比例的项。

如果需要提高精度，计算$n>2$所相应的各项，情况要更复杂一些。不仅要顾及各展开式的高阶项，还要顾及许多可能影响计算精度的因素。例如月球运动周期性的不均匀，观测值的精度，不同高度（决定于半长轴a）的卫星，以及施摄体轨道偏心率e_1的高阶影响，等等。

限于篇幅，以下仅简要分析某些因素影响的量级大小，以便在实际计算时有助于判断取舍。

（1）根据（10-54）式，为了估计计算摄动函数展开式应取的项数，可用下式来判断：

$$\sigma_1 = \mu_1\left(\frac{a}{a_1}\right)^n \qquad (10\text{-}87)$$

其中有下标“1”的量对应于施摄体，μ_1是施摄体与地球的质量比。

月地质量比 $\mu_M = 1.23001\times10^{-2}$

日地质量比 $\mu_\odot = 332958\times10^{-5}$

上式中a是卫星轨道半长轴，a_1是施摄体轨道半长轴。

月轨半长轴　　$a_M = 3844 \times 10^5 \text{km}$

日轨半长轴　　$a_s = 1495 \times 10^8 \text{km}$

利用以上数据，可算出微小摄动参数 σ_1，举例如表 10-1 所示。

表 10-1

n	$a=8400\text{km}$		$a=42000\text{km}$	
	σ_M	σ_S	σ_M	σ_S
2	0.6×10^{-5}	1.0×10^{-3}	1.5×10^{-4}	2.6×10^{-2}
3	1.3×10^{-7}	0.6×10^{-7}	1.6×10^{-5}	0.7×10^{-5}
4	2.8×10^{-9}	3.3×10^{-12}	1.7×10^{-6}	2.1×10^{-9}
5	0.6×10^{-10}	1.9×10^{-16}	1.9×10^{-7}	5.8×10^{-13}
6	1.3×10^{-12}	1.0×10^{-20}	2.1×10^{-8}	1.6×10^{-16}
7	2.9×10^{-14}	0.6×10^{-24}	2.3×10^{-9}	4.6×10^{-20}

（2）我们计算摄动值是为了用于大地测量，因此计算任一摄动量的精度应当与计算地球引力位系数的精度相适应。我们知道，地球引力位系数 J_n、C_{nk}、S_{nk} 的量级约为：

$$n=2,\ J_2 \approx 10^{-3}$$

$$n>2,\ \begin{matrix} J_n \\ C_{nk},\ S_{nk} \end{matrix} \approx 10^{-6}$$

前面讲过，有许多影响计算精度的因素，如果把每一因素都看作微小摄动参数 σ_q，它们的量级不一定相同。例如，$\sigma_{q=1} \approx J_2 \approx 10^{-3}$，$\sigma_{q>1} \approx 10^{-6}$，等等。根据解常微分方程的小参数法原理，受摄运动微分方程的解将包含这些小参数的一阶项、二阶项、三阶项（含因子 σ^1，σ^2，σ^3，……），以及互乘项（含因子 $\sigma_1\sigma_2$，$\sigma_2\sigma_3$，……，$\sigma_1^4\sigma_2^2$，$\sigma_1^2\sigma^3\rho$……），等等。如同是多变量三角级数互乘的结果，因此小参数 σ 越多，σ 取的幂次越高，互乘的次数就越多，解析表达式也就越复杂，要想仅凭手工推导出这些表达式，一阶、二阶还能做到，再高阶就非用电子计算机不可。

在考虑将表达式算到哪一阶才合适时，应当考虑观测值的精度，从而确定出计算规定的精度，以免浪费时间。如果规定计算摄动的精度为 10^{-9}，则应保留到形如 $\sigma_{q=1}\sigma_{q>1}$ 的项，精度为 10^{-12}时，则应保留到形如 $\sigma_{q=1}^2\sigma_{q>1}$，$\sigma_{q=1}^4\sigma_{q>1}^2$，……，等项。

现在我们来简要分析地球引力位展开式。将 C_{nk}^1 和 S_{nk}^1 表示为 e_1 的 m 幂展开式，考虑（10-87）的小摄动参数，将 J_2 相应表为 J_2^s，$s=1$，2，3，……，根据小参数法原理，可写为

$$\mu_1\left(\frac{a}{a_1}\right)^s e_1^m = J_2^s \tag{10-88}$$

仍用前面的数据，可算出当 J_2 取到某个 s 幂时，计算 C_{nk}^1 和 S_{nk}^1 应顾及 e_1 的几阶项。结果列于表 10-2 中。

表 10-2

J_2^S	a=8400km		a=42000km	
	月	日	月	日
J_2^1	1	1	1	1
J_2^2	1～2	1	3	2
J_2^3	3	2	6	3
J_2^4	5	3	9	4

10.3.3 大气阻力摄动加速度

在人造卫星运动问题中，大气层阻力影响可以说是最困难的一个天文动力学问题，主要是由于人们对高空大气层的物理结构及其变化难以确切知道，观测困难，数据不足。人造卫星出现以来，国际上许多科学机构都在努力利用卫星研究大气层，并且有了很大进展，但是直到现在（八十年代）仍然没有建立起关于大气层阻力对卫星运动摄动的一般解析理论(见参考文献[33])。

但是，利用人造卫星研究大气层的成果，确实帮助人们提高了对大气层的认识。过去人们认为：大气层好比一个包围地球的薄球壳，大气层的厚度小于地球半径，地球连同大气层绕太阳在无大气的行星际空间运动。现在这个看法要修改了。地球是在一个巨大的大气层中运动，迎太阳一面可以延伸到5万km，背太阳一面还要远得多，大气层如同一个彗星形状(见参考文献[16])。如果把太阳发出的粒子流也看做是大气成分，这种粒子流的平均速度约每秒400km，并且可以延伸到海王星轨道以外。

利用卫星研究大气层主要是研究大气层的密度分布及其变化，而太阳对大气层的作用是决定性的因素。为了描述大气层的情况，国际上建立过好些现代大气层模型，目前认为最好的是1972年正式发表的《标准大气层 CIRA 1972》(Cospar Internatinal Reference Atomosphere 1972)。在这个模型中决定大气密度的变量有：地球表面上空的高度，所研究地点的纬度，地方太阳时，太阳赤纬，以及太阳辐射通量（10.7厘米波）和地磁指数。用这些变量（除高度及纬度外）可以在一定程度上计算出密度的时间变化，发现半日的，全日的，半年的，全年的，十一年的周期，以及太阳活动及磁暴产生的影响。但是还有许多不规则的变化仍然无法计算和预报。

研究人造卫星运动受大气阻力影响产生的轨道变化，需要知道大气层密度。反过来，如果能测出轨道变化的速度，又可进一步计算大气层密度，这是一个反复精化的过程。

我们这里只讨论大气阻力引起的摄动，导出摄动加速度的一般表示式。而且从大地测量应用上考虑，过高层的大气层影响意义不大，所以仍将大气层看作是近于地球形状的扁球层。

作用于卫星的大气阻力可由以下空气动力公式表示：

$$\vec{F}_A = -\frac{1}{2} C_D \rho S V' \vec{V}' \tag{10-89}$$

式中，

V'——运动的卫星相对于大气层的速率；

$\vec{V}'$——速度矢量；

ρ——卫星飞行的大气层部分的密度；

$\overline{S}$——卫星的横截面(垂直于$\vec{V}'$)面积；

C_D——空气动力系数。若卫星直径小于50m，可取

$$C_D = 2.2.$$

由这个力产生的摄动加速度可写为

$$\vec{\omega}_A = -\sigma_A \chi_A \rho V' \vec{V}' \tag{10-90}$$

其中

$$\sigma_A = \frac{1}{2} C_D \frac{\overline{S}}{m} \tag{10-91}$$

可以看作是摄动参数。上式中m是卫星质量。(10-90)式中的χ_A是转换函数，按下列情况取值：

$$\chi_A = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \qquad \left(大气层\begin{matrix}内层\\外层\end{matrix}\right)$$

若用S_A、T_A、W_A表示摄动加速度的径向、横向、法向分量，可写出以下关系式：

$$\begin{pmatrix} S_A \\ T_A \\ W_A \end{pmatrix} = -\sigma_A \chi_A \rho V' \begin{pmatrix} V'_S \\ V'_T \\ V'_W \end{pmatrix} \tag{10-92}$$

式中，V'_S，V'_T、V'_W是$\vec{V}'$的径向、横向、法向投影。设V表示卫星的轨道速度，

V_A表示在卫星飞行高处大气层的转动速度，可认为（并不准确）它等于地球自转速度。因而有

$$V_A = r \cdot \nu_E \cdot \cos\delta \tag{10-93}$$

式中，r是卫星的地心矢径，δ是卫星的地心赤纬，ν_E是地球自转角速度。

若用$\overline{\beta}$表示矢量$\vec{V}$和$\vec{V}_A$的夹角，则

$$V'^2 = V^2 + V_A^2 - 2VV_A \cos\overline{\beta} \tag{10-94}$$

现在讨论如何计算（10-92）式中V'_S、V'_T、V'_W。由于矢量$\vec{V}_1$在地心直角坐标系x、y、z轴上的投影分别为

$$\left.\begin{aligned} V'_x &= V_x + V_{Ax} \\ V'_y &= V_y + V_{Ay} \\ V'_z &= V_z + V_{Az} \end{aligned}\right\} \tag{10-95}$$

但$V_{Az} = 0$，另外还因为$V_W = 0$，$V_{AS} = 0$，所以由无摄运动公式可求得（参见(3-48)、(3-49)式）为

$$
\left.\begin{aligned}
V_S &= \dot{r} = e\sqrt{\frac{\mu}{p}}\sin v \\
V_T &= \sqrt{V^2-\dot{r}^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p}}\,(1+e\cos v)
\end{aligned}\right\} \tag{10-96}
$$

式中，e为卫轨偏心率，v为真近点角，μ为地心引力常数，$p=a(1-e^2)$，a为卫轨半长轴。由此可得

$$
\begin{pmatrix} V'_S \\ V'_T \\ V'_W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e\sqrt{\dfrac{\mu}{p}}\sin v \\ \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}\,(1+e\cos v) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{Ax} \\ V_{Ay} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{10-97}
$$

式中，α、β、γ；α'、β'、γ'；α''、β''、γ''分别是矢径、横向轴、法向轴对x、y、z轴的方向余弦。

由于

$$
\left.\begin{aligned}
V_{Ax} &= -r\nu_E\cdot\beta \\
V_{Ay} &= +r\nu_E\cdot\alpha
\end{aligned}\right\} \tag{10-98}
$$

又因 $x=r\alpha$，$y=r\beta$，$z=r\gamma$，顾及(10-33)～(10-36)式可得

$$
\left.\begin{aligned}
\alpha\beta'-\alpha'\beta &= \cos i \\
\alpha\beta''-\alpha''\beta &= -\cos\mu\sin i
\end{aligned}\right\} \tag{10-99}
$$

因此摄动加速度的一般表示式为

$$
\begin{pmatrix} S_A \\ T_A \\ W_A \end{pmatrix} = -\sigma_A\chi_A\rho V' \begin{pmatrix} e\sqrt{\dfrac{\mu}{p}}\sin v \\ \sqrt{\dfrac{\mu}{p}}\,(1+e\cos v)+r\nu_E\cos i \\ -r\nu_E\cos u\sin i \end{pmatrix} \tag{10-100}
$$

式中的V'由（10-94）式计算。

如果用任一大气层模型提供的密度值代入上式，则（10-100）这个表示式完全适用于密切根数微分方程（10-38）式的数值积分。

10.3.4 大气层密度的纬度效应

如果近似地将大气层看作由理想气体所组成，则在有重力加速度g的引力场中，密度沿梯度变化，可以表示为

$$
\rho = \rho_0\cdot\exp\left(-\frac{h}{H}\right) \tag{10-101}
$$

式中，

ρ_0——在某一指定水平面上的密度；

h——在上述水平面以上某点的高度(沿梯度)；

H——高度的标度，由下式计算

$$H=\frac{kT}{mg} \tag{10-102}$$

式中，$k=1.38\times10^{-23}$，是玻尔兹曼常数。T是绝对温度，m是粒子质量，g是重力加速度。(10-101)式所表示的是所谓稳定大气的公式，用它来描述密度随高度的变化，有时与实际情况会有明显的差别。因为H用（10-102）表示并不完善，特别是在高度2000km以下，它会是h的很复杂的函数，通常可以用h的代数函数或给定幂的多项式来逼近H。由于高度变化的范围越小，(10-101)式就越精确，因而一般是将大气层分层研究。利用卫星研究大气层密度，对于不同高度的卫星通常需要有不同的分层办法。这里我们不去讨论它。

如果我们将（10-101）式中的h取作卫星近地点水平面以上的高度，则可表示为

$$h=r-a(1-e) \tag{10-103}$$

式中a是卫轨半长轴，e是卫轨偏心率。

大气层有扁率，可以认为它与地球扁率相同，即等于1:298.256，所以上式应写为

$$h=r-a(1-e)+\Delta h_\varphi \tag{10-104}$$

显然上式中的Δh_φ是随纬度的不同而改变数值的，因而h值也随纬度变化，用这个可变的h代入（10-101）式计算大气层密度，密度值也会随纬度变化，因此由Δh_φ产生的密度变化就称为密度值的纬度效应。

下面推导Δh_φ的表示式，使其精度达到扁率的一次幂量级。

设初始的卫轨近地点高度r_{E0}为

$$r_{E0}=a(1-e) \tag{10-105}$$

可以将它看作是卫星所通过近地点处大气层椭圆子午截面上的地心距。根据椭球大地测量公式，在这个椭圆上任一流动近地点高度r_E应为

$$r_E=\frac{\overline{a}_e\sqrt{1-\overline{e}^2}}{(1-\overline{e}^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}=\overline{a}_e(1-\overline{\alpha}\sin^2\varphi+\cdots\cdots) \tag{10-106}$$

式中，

$\overline{a}_e$是这个大气层椭圆的赤道半径；

φ是卫星的地心纬度，其数值等于地心赤纬；

$\overline{e}$是这个大气层椭圆的偏心率，它和扁率的关系为

$$\overline{e}^2=2\overline{\alpha}-\overline{\alpha}^2 \tag{10-107}$$

若令φ_π为卫轨近地点的地心纬度，则有

$$\sin\varphi_\pi=\sin\omega\sin i \tag{10-108}$$

根据(10-105)、(10-106)式，可得

$$\overline{a}_e=a(1-e)(1+\overline{\alpha}\sin^2\omega\sin^2 i-\cdots\cdots \tag{10-109}$$

因此得

$$r_E=a(1-e)[1+\overline{\alpha}(\sin^2\omega-\sin^2 u)\sin^2 i+\cdots\cdots] \tag{10-110}$$

于是求出

$$\Delta h_{\pi}=-\overline{\alpha}a(1-e)(\sin^2\omega-\sin^2u)\sin^2 i+\cdots\cdots \tag{10-111}$$

但是当观测值精度提高后，上式就不够用了，所以还需要有更精确的顾及纬度效应的 h 表示式。

由(10-105)、(10-106)式可以写出

$$r_E^l=a^l(1-e)^l(1-\overline{e^2}\cos^2\varphi_{\pi})^{\frac{l}{2}}\cdot(1-\overline{e^2}\cos^2\varphi)^{-\frac{l}{2}} \qquad (l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \tag{10-112}$$

再将后两个括号的表示式展开为二项式级数，并用（10-108）式表示 φ，则可得

$$r_E^l=a^l(1-e)^l\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{\frac{l}{2}}{n}\binom{-\frac{l}{2}}{m}\cdot\left(\overline{\gamma}\frac{\sin^2 i}{4}\right)^{n+m}\times\sum_{k=0}^{2n}\sum_{s=0}^{2m}$$

$$\binom{2n}{k}\binom{2m}{s}\exp\sqrt{-1}\cdot 2[(m-s)v+(n+m-k-s)(\omega-90°)] \tag{10-113}$$

式中

$$\overline{\gamma}=\frac{\overline{e^2}}{1-\overline{e^2}}=0.0067385 \tag{10-114}$$

最后用（10-113）式求出的 r_E 计算 h，即

$$h=r-r_E \tag{10-115}$$

10.3.5 卫星相对于大气层的速度展开式

我们在（10-93）式中定义过大气层转动速度 V_A，又曾用 V 表示卫星的轨道速度，由于

$$\left|\frac{V_A}{V}\right|<1$$

所以可将（10-94）式写为

$$V'=V\left[1+\left(\frac{V_A}{V}\right)^2-2\left(\frac{V_A}{V}\right)\cos\overline{\beta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$=V\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{V_A}{V}\right)^k Q_k(\cos\overline{\beta})\right] \tag{10-116}$$

式中 Q_k（$\cos\overline{\beta}$）是函数

$$F_V=\left[1+\left(\frac{V_A}{V}\right)^2-2\left(\frac{V_A}{V}\right)\cos\overline{\beta}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{10-117}$$

按 $\left(\frac{V_A}{V}\right)$ 展开式的系数。如果将函数 F 及其展 开 式对 $\left(\frac{V_A}{V}\right)$ 微分，再使两边 $\left(\frac{V_A}{V}\right)$ 的同次幂系数相等，便可得以下递推式

$$(k+1)Q_{k+1}(\cos\overline{\beta}) = P_{k-1}(\cos\overline{\beta}) + Q_1(\cos\overline{\beta})P_k(\cos\overline{\beta})Q_1(\cos\overline{\beta})$$
$$= -\cos\overline{\beta} \tag{10-118}$$

式中 $P_n(\cos\overline{\beta})$ 是勒让德多项式。

如果将 F_V 展为二重二项级数，则可求得函数 $Q_k(\cos\overline{\beta})$ 的一般表示式为

$$Q_k(\cos\overline{\beta}) = \sum_{s=0}^{E(\frac{k}{2})}\binom{\frac{1}{2}}{k-s}\binom{k-s}{s}(-2)^{k-2s}\cdot(\cos\overline{\beta})^{k-2s} \tag{10-119}$$

由于$\overline{\beta}$是$\vec{V}$和$\vec{V}_A$的夹角，而$\vec{V}_A$又是沿赤纬δ的平行圈的切线方向，它对地心直角坐标系轴x、y、z的方向余弦分别是

$$-\beta\sec\delta、\qquad \alpha\sec\delta、\quad 0$$

上述α、β是r对x、y轴的方向余弦，所以我们能用轨道根数表示$\cos\overline{\beta}$，即

$$\cos\overline{\beta} = -\frac{\dot{x}}{V}\beta\sec\delta + \frac{\dot{y}}{V}\alpha\sec\delta = \frac{\sqrt{\mu p}}{rV}\sec\delta\cos i \tag{10-120}$$

现在我们可由（10-116)、(10-119)、(10-120)、(10-93）各式求出：

$$V' = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}(-1)^k\cdot\frac{2^{(n-2k)}(\frac{1}{2})_{n-k}}{k!(n-2k)!}\left(\mu p\right)^{(\frac{n}{2}-k)}\cdot\nu_E^n$$
$$\times(1-\sin^2 i\sin^2 u)^k\cdot\frac{r^{2k}}{V^{[2(n-k)-1]}} \tag{10-121}$$

设 a^* 为任意实数，则由能量积分我们可写出展开式为

$$V^{a^*} = \frac{(2\mu)^{a^*/2}}{r^{a^*/2}}\left(1-\frac{r}{2a}\right)^{a^*/2} = (2\mu)^{a^*/2}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(-1)^q}{(2a)^q}\binom{a^*/2}{q}$$
$$\cdot r^{\left(q-\frac{a^*}{2}\right)} \tag{10-122}$$

由于椭圆轨道上，$\frac{r}{2a}<1$，所以这个展开式绝对收敛。

如果令

$$a^* = 2(n-k)-1$$

则（10-121）式可写为

$$V' = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{E(\frac{n}{2})}\sum_{q=0}^{\infty}(-1)^{k+q}\cdot\frac{2^{(\frac{1}{2}-k-q)}\cdot(\frac{1}{2})_{n-k}}{k!(n-2k)!}\times\binom{-n+k+\frac{1}{2}}{q}$$
$$\cdot\mu^{(\frac{1-n}{2})}\cdot\nu_E^n\cdot p^{(\frac{n}{2}-k-q)}\cdot(1-e^2)^q\times(1-\sin^2 i\sin^2 u)^k\cdot r^{(n-k-q-\frac{1}{2})} \tag{10-123}$$

上式中最后括号内含 u 的函数式又可展为

$$(1-\sin^2 i\sin^2 u)^k = \sum_{m=0}^{k}\frac{(-1)^m}{2^{2m}}\binom{k}{m}(\sin i)^{2m}\times\sum_{s=0}^{2m}\binom{2m}{s}\exp\sqrt{-1}$$

$$\cdot[2(m-s)(90^\circ-u)] \tag{10-124}$$

10.3.6 计算大气阻力摄动的精度估算

前面几节我们已经导出计算大气密度ρ所需的r_E的展开式和V'的展开式，如果选用好的大气层模型，这些展开式能满足一定的精度要求。但是从大地测量方面考虑，计算大气阻力摄动加速度的精度应当和观测卫星空间位置的精度相适应，根据不同的观测精度来规定计算精度，从而决定各展开式应取多少项。现在我们为这个目的讨论一下近似估算精度的方法。

根据引力定律，我们可以将计算摄动加速度的误差Δw和沿矢径的线性测量值的误差Δr两者的关系表示为

$$|\Delta w| = \frac{V_{e,s}^2}{r_\pi}\left|\frac{\Delta r}{r_\pi}\right| \tag{10-125}$$

式中

$$V_{e,s} > \sqrt{\frac{2\mu}{r_\pi}} \tag{10-126}$$

表示卫星在近地距r_π处的逃逸速度。

现在我们假定线性测量值误差$|\Delta r| = 1\text{ m}$，再取（10-91）式中卫星的面积质量比$\overline{S}/m = 10^2\text{cm}^2\cdot\text{g}^{-1}$（这个数值相当于气球卫星情况），$C_D = 2.2$，于是可求得摄动参数$\sigma_A$为

$$|\sigma_A| = 1.1\times10^2\ \text{cm}^2\cdot\text{g}^{-1}$$

再由（10-90）式，令其中的

$$\chi_A = 1 \qquad\qquad V'\approx V$$

则得

$$|\Delta w| = |\sigma_A|V^2\cdot|\Delta\rho| \tag{10-127}$$

由于是为了估算精度，我们可将上式中的V近似地取以r_π为半径的圆轨道速度，即

$$V\approx\sqrt{\frac{\mu}{r_\pi}}$$

对于$|\Delta\rho|$的取值，要随不同高度情况而定。根据（10-101）式，采用将大气层分层的办法，例如以200 km为最低层下界的高度，此处的大气密度为$2\times10^{-13}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$，$H=30\text{km}$，以此值为$P_o$，$H_o$，再将（10-101）式展为级数，同时顾及密度的纬度效应Δh_φ的展开式（10-111），便可将密度误差$\Delta\rho$分别表示为：

$$\Delta\rho_\rho \approx \frac{\rho_0}{(N_\rho+1)!} \tag{10-128}$$

$$\Delta\rho_\varphi \approx \frac{|dh_\varphi/H_0|^{(N_\varphi+1)}}{(N_\varphi+1)!} \tag{10-129}$$

式中N_ρ，N_φ分别是（10-101）式的展开式和（10-111）式中所取的项数。

由（10-111）及（10-116）式，可得

$$\frac{dh_\varphi}{H_o}=\overline{a}\frac{a(1-e)}{H_0} \tag{10-130}$$

$$\Delta\rho_V\approx\rho_{max}\left|\frac{(V_A)_{max}}{V}\right|^{(N_V+1)} \tag{10-131}$$

式中，N_V 是（10-123）式按 n 求和的上限，$(V_A)_{max}=0.478\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$ 是高度 200 km 处大气层转动的赤道线速度。

在 200 km 这个高度处的大气密度 ρ_0 可以用作（10-131）式中的 ρ_{max} 值。

现在我们使（10-125）、（10-127）两式相等，根据上面给出的有关数据，可求出

$$N_\rho\approx7,\qquad N_\varphi\approx\frac{6}{7},\qquad N_V\approx4 \tag{10-132}$$

以上，我们采用一些近似数据以 1 m的测量误差求出了与之相应的各展开式应取的项数。显然这对于更高精度的观测值和计算要求还不够用，还需要有更精确更一般的解析展开式和计算方法，限于篇幅，这里不再讨论，可参阅参考文献[33]。

10.3.7 光压摄动加速度

作用于卫星的太阳光压力可以用下式计算

$$F_e=\frac{S_0}{c}(1+k)\overline{S}\cdot(\cos\alpha)^2\cdot\left(\frac{r_1}{\Delta}\right)^2 \tag{10-133}$$

式中：

$S_0=1.3533\times10^6\ \mathrm{erg\cdot cm^{-2}\cdot s^{-1}}$ 是太阳常数，

$\overline{S}$ 是卫星横截面面积，

c 是光速，

k 是反射系数，对于绝对黑的物体 $k=0$，对于人造卫星 $0<k<1$，

α 是太阳光线对卫星表面的入射角。若是球形卫星，则 $\alpha=0$，

r_1 是日地距离，

Δ 是日卫距离。

光压力产生的摄动加速度为

$$w_e=\sigma_e\chi_e\left(\frac{r_1}{\Delta}\right)^2 \tag{10-134}$$

其中

$$\sigma_e=\frac{\overline{S}}{m}\cdot\frac{S_0}{c}(1+k)\cos^2\alpha \tag{10-135}$$

是摄动参数，m 是卫星质量，χ_e 是转换函数，取值为

$$\chi_e=\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\quad\left(\text{地影以}\begin{matrix}\text{外}\\\text{内}\end{matrix}\right) \tag{10-136}$$

1. 设如图 10-2，在卫星运行到地影边界线时刻，由地心到太阳方向与到卫星方向所夹的角为 $180°\pm\zeta$，我们把整个地影看成是一个圆柱，于是由图示关系可求得

$$\cos\zeta = +\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{r_T}\right)^2} \qquad (10\text{-}137)$$

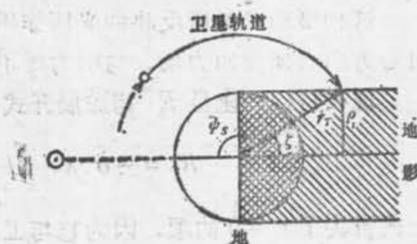


图 10-2

式中，ρ——地球平均半径；

r_T——卫星在地影边界线上时的地心距。

另一方面，卫星在任一位置时，从太阳方向起算到卫星方向的角距 ψ 可按（10-55）式计算，即

$$\cos\psi_e = \sin\delta\sin\delta_e + \cos\delta\cos\delta_e\cdot\cos(\alpha_e-\alpha) \qquad (10\text{-}138)$$

于是可知，当卫星在地影内时，$180°-\phi_e<\zeta$，在地影外时，$180°-\psi_e>\zeta$，在界线上时，$180°-\psi_e=\zeta$。

如果卫星轨道偏心率 $e\to0$，可取矢径平均值作为(10-137)式中的 r_T，从而独立算出 ζ 值，可将（10-138）式算出的结果作为检核。计算卫星的 α、δ、r 在一圈之内用无摄运动公式计算就可以了。至于顾及各项因素，摄动的精确计算公式以后再讨论。如果使（10-137）和（10-138）两式相等，可得出所谓地影方程，求解这种方程可用于计算卫星进出地影的时刻，但是求解十分复杂。

2. 现在讨论摄动加速度（10-134）式的展开式

摄动加速度在地心直角坐标系轴上的投影分别为

$$X_e = -w_e\frac{x_e-x}{\Delta}$$

$$Y_e = -w_e\frac{y_e-y}{\Delta}$$

$$Z_e = -w_e\frac{z_e-z}{\Delta}$$

此外

$$\Delta^2=(x_e-x)^2+(y_e-y)^2+(z_e-z)^2$$
$$r_1^2=x_e^2+y_e^2+z_e^2$$

再由（10-134）式可求得光压决定的摄动函数

$$R_e=-\sigma_e\chi_e r_1^2\left(\frac{1}{\Delta}\right) \qquad (10\text{-}139)$$

而

$$X_e=\frac{\partial R_e}{\partial x},\quad Y_e=\frac{\partial R_e}{\partial y},\quad Z_e=\frac{\partial R_e}{\partial z} \qquad (10\text{-}140)$$

这种摄动函数所反映的光压作用的物理意义是，辐射源（太阳）在空间形成了一个沿日心方向有梯度的力场，与引力场不同的仅是这里是斥力。

现在将摄动函数 $R_{\circ}$ 写成展开式

$$R_{\circ}=-\sigma_{\circ}\chi_{\circ}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^{n}}{r_{s}(n-1)}P_{n}(\cos\phi_{s}) \tag{10-141}$$

上式省去了 $n=0$ 的项，因为它与卫星坐标无关。这个展开式与月日摄动函数的出发展开式（10-63）原则上相同。

下面我们讨论一下如何按精度要求决定展开式应取的项数。

当测量距离的精度为 1 m 时，对于气球型这样的卫星，取 $r\approx10^{4}$ km，则可求得

$$|\Delta w_{\circ}|\approx10^{-4}\ \mathrm{cm\cdot s^{-2}} \tag{10-142}$$

若取这类卫星的面积质量比为

$$(\overline{S}/m)\approx10^{2}\ \mathrm{cm^{2}\cdot g^{-1}}$$

取反射系数 $(1+k)\approx1.5$，这已近于漫反射情况，于是可得

$$\sigma_{\circ}\approx0.68\times10^{-2}\ \mathrm{cm\cdot s} \tag{10-143}$$

再取 $\chi_{\circ}=1$，$\max|P_{n}|=1$，$r\approx10^{4}$，$r_{s}\approx1.5\times10^{8}$，

便可求得 $\dfrac{\partial R_{\circ}}{\partial r}$ 的估值为

$$\left|\frac{\partial R_{\circ}}{\partial r}\right|<\sigma_{\circ}\left[1+2\left(\frac{r}{r_{s}}\right)+3\left(\frac{r}{r_{s}}\right)^{3}+\cdots\right]=(0.68\times10^{-2}+0.9\times10^{-6}+\cdots)\mathrm{cm\cdot s^{-1}} \tag{10-144}$$

比较（10-142）和（10-144）式可以看出，甚至在测距精度提高到 0.1m 的情况下，展开式（10-141）也只要取一项就够了。因此，摄动函数可简单写为

$$R_{\circ}=-\sigma_{\circ}\chi_{\circ}\cdot r\cos\phi_{s} \tag{10-145}$$

若令

$$\mu_{\circ}=-\sigma_{\circ}\chi_{\circ}a_{1}^{2} \tag{10-146}$$

其中 a_{1} 为地球轨道平均半径，则 $R_{\circ}$ 可改写为

$$R_{\circ}=\frac{\mu_{\circ}}{a_{1}}\left(\frac{r}{a_{1}}\right)P_{1}(\cos\phi_{s}) \tag{10-147}$$

利用月日摄动函数展开式（10-57），可写出

$$R_{\circ}=\frac{\mu_{\circ}}{a_{1}}\left(\frac{r}{a_{1}}\right)\cdot\{C_{1,0}(t)P_{1,0}(\sin\delta)+[C_{1,1}\cos\alpha+S_{1,1}\sin\alpha]P_{1,1}(\sin\delta)\} \tag{10-148}$$

利用（10-58）式可写出

$$\left.\begin{aligned}C_{1,0}(t)&=\sin\delta_{s}=\sin u_{s}\sin\varepsilon\\C_{1,1}&=-\cos\delta_{s}\cos\alpha_{s}=-\cos u_{s}\\S_{1,1}&=-\cos\delta_{s}\sin\alpha_{s}=-\sin u_{s}\cos\varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{10-149}$$

式中，ε 是真黄赤交角，u_s 是由春分点起算的太阳真黄经，计算时可用平黄经 λ_s 取代，因为地球轨道的偏心率（$e_1=0.016718$）的影响与（10-144)式的第二项是同一量级，真黄赤交角也可用平黄赤交角取代，这样，利用（10-75）和（10-78）式的数据，可求得

$$\left.\begin{aligned} C_{1,0}(t) &= 0.397819\sin\lambda_s \\ C_{1,1} &= -\cos\lambda_s \\ S_{1,1} &= -0.917464\sin\lambda_s \end{aligned}\right\} \tag{10-150}$$

而

$$\lambda_s = 279.325° + 0.99030707° d \tag{10-151}$$

其中 d 从 1980 年 1 月 0 日 12 时 ET 起算，以平太阳日为单位。

由本节的分析可知，如果将（10-148）式并到太阳引力摄动函数中，显然是合理的。

10.3.8 潮汐摄动函数

我们知道，日月潮汐力会引起水准面形变，在同一外部点上，其数值呈周期性变化。这种形变产生的摄动函数可写为

$$R_t = k_2\mu_1\frac{a_e^2}{r^3}\left(\frac{a_e}{r_1}\right)^3 P_2(\cos\psi') \tag{10-152}$$

式中 $k_2\approx0.3$ 是勒夫数，它描述地球的弹性。ψ' 是地心到卫星方向和到潮峰方向的地心角。潮峰滞后于月球或太阳约 5°。上式中其余符号意义同前。

计算 $\cos\psi'$ 的表示式与（10-55）式相同，仅需用潮峰的赤道坐标 α'、δ' 取代该式中的 α_1、δ_1。讨论潮汐摄动的方法也和讨论月日摄动相同。因此我们可将（10-152）式写为

$$R_t = \mu\frac{a_e^2}{r^3}\sum_{k=0}^{2}(\Delta C_{2k}^{1}\cos k\lambda + \Delta S_{2k}^{1}\sin k\lambda)\cdot P_{2k}(\sin\delta) \tag{10-153}$$

式中系数为

$$\begin{matrix}\Delta C_{2k}^{1} \\ \Delta S_{2k}^{1}\end{matrix} = k_2\frac{\mu_1}{\mu}(2-\delta_{k,0})\frac{(2-k)!}{(2+k)!}\left(\frac{a_e}{r_1}\right)^3\cdot P_{2k}(\sin\delta')\cdot\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(\alpha'-S) \tag{10-154}$$

我们先简单估计一下上式的量级。对于月潮，约为 1.69×10^{-8}，对于日潮，约为 0.77×10^{-8}，差不多都是 $J_2^2\cdot J_2$ 这个量级。可见，（10-153）式形式上与地球引力位展开式的前三项相同，因此计算潮汐对卫星运动的影响可以直接利用地球引力位展开式，将那里的系数 $C_{20}(=-J_2)$、C_{21}、S_{21}、C_{22}、S_{22} 作如下置换：

$$\left.\begin{aligned} C_{20} &\to (C_{20}+\Delta C_{20}^{M}+\Delta C_{20}^{s}) \\ C_{21} &\to (C_{21}+\Delta C_{21}^{M}+\Delta C_{21}^{s}) \\ S_{21} &\to (S_{21}+\Delta S_{21}^{M}+\Delta S_{21}^{s}) \\ C_{22} &\to (C_{22}+\Delta C_{22}^{M}+\Delta C_{22}^{s}) \\ S_{22} &\to (S_{22}+\Delta S_{22}^{M}+\Delta S_{22}^{s}) \end{aligned}\right\} \tag{10-155}$$

其中右上标M，s 分别表示月球和太阳。

坐标 α'、δ' 应表示为

$$\alpha' = \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \quad \delta' = \delta_1 + \Delta\delta_1 \tag{10-156}$$

式中 α_1、δ_1 表示月球或太阳的赤道坐标，$\Delta\alpha_1$、$\Delta\delta_1$ 表示相应的潮峰滞后改正。如果取滞后角为 5°，则由斜边为 5° 直角边为 $\Delta\delta_1$ 及 $\Delta\alpha_1 \cos\delta_1$ 的球面直角三角形（$\Delta\delta_1$ 边所对的球面角分别为 19°03′（月）或23°26′（日）），不难求得：

$$\left.\begin{aligned} \Delta\delta_M &= 1.6^\circ \qquad \Delta\alpha_M = 4.7^\circ \sec\delta_M \\ \Delta\delta_s &= 2.0^\circ \qquad \Delta\alpha_s = 4.6^\circ \sec\delta_s \end{aligned}\right\} \tag{10-157}$$

显然，用上两式的关系及数据，可以将（10-154）式写成带有已知数字系数的时间显函数。不过还可以更简单些，因为（10-154)式的任何一个所求量都等于(10-80)～(10～85）式的对应表示式乘以系数 σ_t，这个系数为

$$\sigma_t = k_2 \frac{\mu_1}{\mu}\left(\frac{a_e}{a_1}\right)^3$$

而且在（10-86）式中的每一角变量又都需减少 $S+5°$，这里的 S 是零子午圈的春分点时角。如果取 $k_2 = 0.306$，则可得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{tM} &= 1.54438 \times 10^{-8} \\ \sigma_{ts} &= 0.79112 \times 10^{-8} \end{aligned}\right\} \tag{10-158}$$

至于（10-80)～(10-85）式中含奇数倍平近点角的各项，由于它们还与施摄体轨道偏心率有关，故可略去。

10.3.9 岁差和章动摄动函数

地球运动中的岁差和章动现象，使地心天球坐标系成为非惯性系，虽然这种非惯性不很大，但应当考虑。处理这个问题可以有不同的方法，国际上许多学者发表过他们的研究结果，如 Y.Kozai（1960)，G.Veis（1969)，K.Lambeck（1973）等等。我们这里讨论的处理方法是把坐标系变动而引起的卫星轨道根数变化作为一种摄动来考虑，先分析岁差的影响，然后分析岁差和章动的共同影响。

1．岁差摄动

这里应当首先说明以下几点：

（1）由于岁差，使地心坐标系轴旋转了一个小角，因而卫星轨道根数 i、Ω、ω 都会改变，但是卫星相对于轨道近地点的位置却不受影响，因而任何一种近点角、轨道半长轴及偏心率都不会因此而改变。

（2）由于岁差，使地球体外部点处引力位的大小发生改变，因而使与地球引力位有关的摄动函数有所变化。

（3）以密切根数表示的运动微分方程（10-30）的解析形式不因坐标系方向的不同而改变。

如果我们用 $\vec{E}_0$ 表示相应于历元 t_0 的轨道根数，用 $\vec{E}$ 表示相应于历元 t 的轨道根数，显然两者的关系可写成：

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \Delta\vec{E}(t, \vec{E}_0) \tag{10-159}$$

同理可对上述（10-30）式的密切根数微分方程写出

$$\dot{\vec{E}}_0=\vec{F}\left(\vec{E}_0,\ \frac{\partial R(\vec{E}_0)}{\partial \vec{E}_0}\right)$$

$$\dot{\vec{E}}=\vec{F}\left(\vec{E},\ \frac{\partial R(\vec{E})}{\partial \vec{E}}\right)$$

$$\dot{\vec{E}}=\dot{\vec{E}}_0+\Delta\dot{\vec{E}}=\vec{F}\left(\vec{E}_0+\Delta\vec{E},\ \frac{\partial R(\vec{E}_0+\Delta\vec{E})}{\partial \vec{E}_0}\cdot\frac{\partial \vec{E}_0}{\partial \vec{E}}\right) \qquad (10\text{-}160)$$

这个关系式是我们讨论问题的基础。

现在我们再把受岁差影响的根数写为

$$\left.\begin{aligned}&\Omega=\Omega_0+n_\Omega\cdot\Delta t\\&\omega=\omega_0+n_\omega\cdot\Delta t\\&i=i_0+n_i\cdot\Delta t\\&\quad(\Delta t=t-t_0)\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}161)$$

式中的 n_Ω、n_ω、n_i 分别表示下标所指根数的岁差运动速度，可用以下各式计算：

$$\left.\begin{aligned}&n_\Omega=m_\alpha-n_\delta\cdot\mathrm{ctg}\left(i_0+\frac{n_i}{2}\Delta t\right)\cdot\cos\left(\Omega_0+\frac{n_\Omega}{2}\Delta t\right)\\&n_\omega=n_\delta\cdot\mathrm{cosec}\left(i_0+\frac{n_i}{2}\Delta t\right)\cdot\cos\left(\Omega_0+\frac{n_\Omega}{2}\Delta t\right)\\&n_i=-n_\delta\sin\left(\Omega_0+\frac{n_\Omega}{2}\Delta t\right)\end{aligned}\right\} \qquad (10\text{-}162)$$

其中 m_α、n_δ 分别是赤经和赤纬的周年岁差。

$$\begin{aligned}&m_\alpha=46.08506''+0.02794''T\\&n_\delta=20.04685''-0.00853''T\end{aligned} \qquad (10\text{-}163)$$

式中 T 以儒略世纪（36525 平太阳日）为单位，从历元 1900 年 1 月 0 日 12^hET 起算。

将（10-162）式中的 Ω_0、ω_0、i_0 看作常量，（10-160）式中的各 $\frac{\partial E_0}{\partial E}$ 除其中的 $\frac{\partial \Omega_0}{\partial \Omega}$ 外都应等于 1，而

$$\frac{\partial \Omega_0}{\partial \Omega}=1-\frac{\partial n_\Omega}{\partial \Omega_0}(t-t_0) \qquad (10\text{-}164)$$

现在我们将（10-30）方程的系数矩阵用 L 表示，利用前面写出的基本关系式(10-160) 以及（10-161）（10-164）各式，省去下标“0”，可将受岁差摄动影响的（10-30）方程写为：

$$\begin{pmatrix}\dot{a}\\ \dot{e}\\ \dot{i}+n_i\end{pmatrix}=(L+\Delta L)\begin{pmatrix}R'_M+\delta R'_M\\ R'_\Omega+\delta R'_\Omega+\Delta R'_\Omega\\ R'_\omega+\delta R'_\omega\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{M}-n \\ \dot{\Omega}+n_{\Omega} \\ \dot{\omega}+n_{\omega} \end{pmatrix} = -(\boldsymbol{L}^{T}+\Delta\boldsymbol{L}^{T})\begin{pmatrix} R'_{a}+\delta R'_{a} \\ R'_{e}+\delta R'_{e} \\ R'_{i}+\delta R'_{i} \end{pmatrix} \tag{10-165}$$

式中

$$\Delta R'_{\Omega} = -\frac{\partial R}{\partial \Omega}\cdot\frac{\partial n_{\Omega}}{\partial \Omega}(t-t_0) \tag{10-166}$$

$$\Delta L = n_i\cdot\frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}}\cdot\Delta t\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ctg} i & -\operatorname{cosec} i \end{pmatrix} \tag{10-167}$$

而 $\Delta\boldsymbol{L}^{T}$ 是其转置矩阵。

(10-165) 式中对应于各根数的

$$\delta R'_{E} = \frac{\partial(\delta R)}{\partial E} \tag{10-168}$$

式中的 δR 称为岁差摄动函数。为了求出它的表示式，可按（10-160）式的方法将 $R(\vec{E}_0+\Delta\vec{E})$ 展为 $\Delta\vec{E}$ 的幂级数，即

$$\delta R = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}(\Delta\vec{E})^{k}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\vec{E}_0}\right)^{k}R \tag{10-169}$$

按照（10-163）式所给的数据，可以算出，在不长于一年的时间内，n_{Ω}、n_{ω}、n_i 的量级约为 10^{-4}，由此可知 $|\Delta L|$。$|R'_{E}|$，$|\delta R'_{E}|$ 等项的量级 $\leqslant 10^{-7}$，而 $|\Delta L|\cdot|\delta R'_{E}|$ 等项的量级 $\leqslant 10^{-11}$。因此我们若将（10-169）式看作是 R 的二阶带谐项，则只要取第一项就够了。

如果将 $R(\vec{E}_0+\Delta\vec{E})$ 写为

$$R(\vec{E}_0+\Delta\vec{E}) = -\mu J_2\left(\frac{a_e^2}{r^3}\right)\times\left[\frac{3}{2}\sin^2(i+\Delta i)\sin^2(v+\omega+\Delta\omega)-\frac{1}{2}\right] \tag{10-170}$$

则岁差摄动函数可表示为

$$\delta R = -\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_e^2}{r^3}\right)[n_i\cos i - N\exp\sqrt{-1}(2u) + \overline{N}\exp\sqrt{-1}(-2u)]\cdot\Delta t \tag{10-171}$$

式中

$$N = \frac{1}{2}(n_{\omega}\sin i + \sqrt{-1}\,n_i\cos i) \tag{10-172}$$

而 $\overline{N}$ 和 N 是复共轭量。

2．岁差与章动摄动

现在讨论岁差与章动的共同影响。设如图 10-3 所示，在历元 t_0 时黄道上有春分点 Υ_0，流动历元 t 时则有 Υ'。图中其他符号的意义如下：

C——t_0 与 t 时真赤道的交点；

D——t_0 与 t 时黄道的交点；

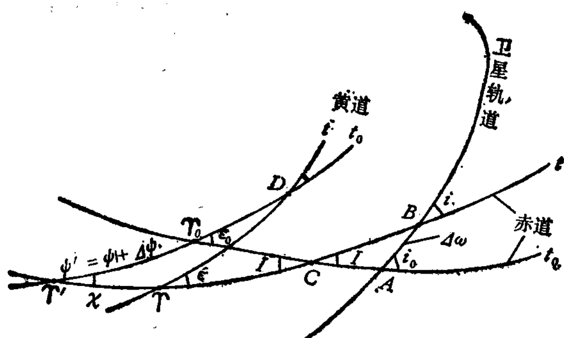


图 10-3

Υ_0、Υ'、Υ——不同的赤道、黄道交出的春分点；

ε_0、ε'、ε——不同黄赤道交出的交角；

$\psi+\Delta\psi$——黄经日月岁差＋黄经章动；

χ——行星岁差（$=\Upsilon'\Upsilon$）；

A、B——卫星轨道对 t_0 及 t 时赤道的交点；

i_0、i——卫星轨道对 t_0 及 t 时赤道的倾角；

$\Delta\varepsilon=\varepsilon'-\varepsilon_0$ 是交角章动。

设在 t_0 时卫星的轨道根数带有下标“0”，而 t 时的轨道根数无下标，则可写出

$$\Omega=\Omega_0+\Delta\Omega,\ \omega=\omega_0+\Delta\omega,\ i=i_0+\Delta i \tag{10-173}$$

式中的$\Delta\Omega$、$\Delta\omega$、Δi 表示因岁差章动而产生的变化。

在伍拉德（E.W.Woolard）等所著球面天文学中对于黄经岁差加章动$\psi+\Delta\psi$和交角章动$\Delta\varepsilon$ 列出了很长的带有数字系数的多变量周期函数表示式，其中包括许多长周期项和短周期项，下面只写出该式少数几项：

$$\begin{aligned}\psi+\Delta\psi&=[0.13791078''+10^{-5}\times1.3497892''T](t-t_0)^{d}-17.2327''\sin\Omega_M\\&\quad-1.2729''\sin 2\lambda_s+\cdots\\\Delta\varepsilon&=0.0012826009(t-t_0)^{d}+9.2100''\cos\Omega_M+\cdots\end{aligned} \tag{10-174}$$

式中

$$T=\frac{\mathrm{JD}(t_0)-2415020.3134}{36524.22} \tag{10-175}$$

是儒略世纪数，$JD(t_0)$是初始时元 t_0（即卫星运动方程从此时刻开始积分的时元）的儒略日数。所有下标为“0”的量也对应于这个初始时元 t_0，前式中的$(t-t_0)^{d}$ 表示以平太阳日计数，式中的 Ω_M 表示月球轨道升交点的黄经，λ_s 表示太阳的平黄经。

为了计算卫星轨道根数的受摄变化$\Delta\vec{E}$或 $\Delta\vec{E}$，仍然应当首先考虑根据观测卫星可能达到的观测精度来估计在计算（10-174）这类多项式中应取多少项才合理。这里不妨提出这样一个指标，即在（10-174）式中保留振幅为 $0.005''$ 的各项，其余更小的舍去。这个指标相当于在离地心 40000 km 的距离处，空间点的线性位移不大于 1 m。在这个指标规定

下，（10-174）式应取的项数为：黄经章动的长周期项要有15项，短周期项要有10项；交角章动的短周期项要有4项。

为了导出形如（10-169）及(10-171)式那样的岁差章动摄动函数，用我们在(10-174)式中写出的那些项已经够用了，舍去其余项产生的误差约为$10^{-9}\sim10^{-10}$。

我们看图10-3中的两个球面三角形：$\Upsilon_0\Upsilon'C$及CAB。图中$\Upsilon_0A=\Omega_0$是卫星轨道根数Ω的初值，即无摄值，$\Upsilon'B=\Omega$是受摄值，我们要求的是$\Delta\Omega=\Omega-\Omega_0$；$AB=\Delta\omega$是根数$\omega$的受摄变化量，即$\Delta\omega=\omega-\omega_0$；而$i$的受摄变化量是$\Delta i=i-i_0$。

由于在三角形$\Upsilon_0\Upsilon'C$中，可以已知$(180-\varepsilon_0)$，$\psi'=\psi+\Delta\psi$，$\varepsilon'=\varepsilon_0+\Delta\varepsilon$，故可算出$\Upsilon_0C$、$\Upsilon'C$、$I$，因此在三角形$CAB$中就可已知$CA=(\Omega_0-\Upsilon_0C)$、$I$、$(180°-i_0)$，于是可解出$i$、$\Delta\omega$、$CB$。再求出$\Omega=CB+\Upsilon'C$。这样，$\Delta i$、$\Delta\omega$、$\Delta\Omega$便全部求出。

计算中用到的ε_0可按下式计算

$$\varepsilon_0=23°27'08.26''-46.846''T-0.059''T^2 \tag{10-176}$$

其中T由（10-175）式计算。

将求得$\Delta\omega$等数值代入（10-170）式，可算出若舍去根数变化量的平方项，产生的误差在一年的短时间内其量级约为10^{-11}。

岁差与章动共同形成的摄动量中，$J_2|\psi'|$及$J_2|\Delta\varepsilon|$的最大值值（在一年内）为

$$\max(J_2|\psi'|)\approx10^{-7}$$

$$\max(J_2|\Delta\varepsilon|)\approx10^{-8} \tag{10-177}$$

10.3.10 地球再辐射摄动影响

这种摄动的性质和作用类似于太阳光压，其摄动加速度方向是沿地球到卫星的矢径方向。辐射可分为短波（可见部分）和长波（红外部分）辐射，短波辐射对卫星的作用又可分为漫反射和镜象反射两部分，后者约为前者的10%。地球上受到太阳辐射的半球部分都会对卫星产生这种再辐射作用。

红外辐射主要是地球大气的对流层形成的，这部分约占此种辐射全量的87%，地球的陆地和海洋表面的作用只占全量的4%和9%（详见参考文献[42]）。

长波和短波辐射的总作用约为太阳光压作用的36%（参考文献同上）。

地球对卫星运动的径向辐射影响其常量部分仅使μ值起变化。根据§10.3.7对太阳光压作用的分析，我们可以用以下的摄动函数来描述再辐射的总作用：

$$R_{re}=\frac{1}{r}(\mu_{re}+\delta\mu_{re}) \tag{10-178}$$

式中的第一项是函数R的径向部分，第二项可如同地球引力位那样展为球函数级数。径向部分可写为：

$$\mu_{re}=\mu_{vi}+\mu_{th}=-(\sigma_{vi}\cos\psi_e+\sigma_{th})a_e^2\kappa^0 \tag{10-179}$$

这是将μ_{re}分为两部分，下标"vi"表示可见辐射部分，下标"th"表示热辐射部分。式中

a_e——地球赤道半径；

ψ_e——地球到太阳方向与到卫星方向的夹角；

κ^0——屏蔽系数；

σ_{0i}，σ_{ih}——摄动参数。

$$\begin{pmatrix}\sigma_{vi}\\ \sigma_{ih}\end{pmatrix}=\frac{\overline{S}}{m}\cdot\frac{S_0}{C}(1+k)\cos^2\alpha\begin{pmatrix}\gamma_e\\ \gamma_T\end{pmatrix} \tag{10-180}$$

γ_0——地球的光学反照率；

γ_T——红外反照率。

式中的系数式各量的意义见（10-135）式。

研究地球再辐射的短波部分除了考虑 ψ_e 外，还应考虑太阳光线对地球 表 面 的 入 射角，这就要加进一个顾及地球位相的函数。不过当 $\psi_e\to 90°$ 时，位相影响就不大，一般不必顾及这种影响。对于两个反照率，一般可取其平均值 $\overline{\gamma}=0.36$ 代入式中计算。

如果用 C_{ns}^{re} 和 S_{ns}^{re} 表示（10-178）式第二项展为球函数展开式后的系数，它们的每一个又可分为两部分，目前只能求出几个偶阶带谐系数，因此摄动函数应写为

$$R_{re}=\frac{\mu_{re}}{r}\left[1-\sum_{s=1}^{6}\kappa^{2s}\cdot J_{2s}^{re}\left(\frac{a_e^{2s}}{r^{2s}}\right)P_{2s}(\sin\delta)\right] \tag{10-181}$$

式中

$$J_{ns}^{re}=-C_{ns}^{re},\ (n=2s)$$

κ^{2s} 是屏蔽系数。

用现代数据（详见参考文献[42]）可以算出：

$$J_2^{re}=-0.207\times10^{-9}$$

$$J_6^{re}=+0.135\times10^{-9}$$

$$J_{12}^{re}=+0.149\times10^{-9}$$

而 J_4^{re}、J_8^{re}、J_{10}^{re} 近于零。

屏蔽系数 κ^0、κ^s 是高度的函数，如果地球是透明的，能让辐射穿过，则任一屏 蔽 系数都等于1。但实际上不是这样，所以 κ 都小于 1，而且随着卫星高度（离地 球 远 近）及位相等因素数值有所不同。但由于这种辐射效应本身很小，所以取一个平均的 κ 值就可以了，这个平均值 $\overline{\kappa}$ 定义为地球的直接可见区面积对整个地球（半径为 a_e）面 积 之 比，即

$$\kappa^0,\ \kappa^{2s}\to\overline{\kappa}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{a_e}{r}\right) \tag{10-182}$$

显然当 $a_e<r<\infty$ 时，$0<\overline{\kappa}<\frac{1}{2}$，取地球半径为 $a_e=6378$ km，则可写出

$$\mu_{re}=-0.248502\overline{\kappa}(1+\cos\psi_e)\mu\times10^{-x} \tag{10-183}$$

若卫星的面积质量比为

$$\frac{\overline{S}}{m}=0.1\ \text{cm}^2\cdot\text{g}^{-1},\quad x\quad 8$$

$$\frac{\overline{S}}{m}=100\ \text{cm}^2\cdot\text{g}^{-1},\quad x=5$$

对于大多数绕地周期为1.5～2小时的卫星来说，平均屏蔽系数数$\overline{\kappa}$值约在0.04～0.1之间。

10.3.11 相对论效应及行星摄动

广义相对论效应引起的天体运动中最大的摄动是近心点长期运动，参考文献[43]比较系统地研究过这个问题。在人造地球卫星轨道上，相对论效应引起的近地点位移，在一年内小于15″，这个量值是微小的，用目前的观测方法未必能测出来。但是，当观测精度提高后可能就需要考虑相对论摄动。如果有了这个需要和可能，那就会使我们想到，是否还需要考虑行星摄动。因此我们首先要比较一下这两者的大小，它们相对于地球引力位二阶带谐引起的摄动加速度的关系。

1．根据牛顿方程（10-38）式，用下标“1”及“2”分别表示属于相对论效应和地球引力位摄动因素，则有

$$\frac{\dot{\omega}_1}{\dot{\omega}_2}=\left(\frac{S_1}{S_2}\right)\cdot\frac{\left[1-\operatorname{tg}v\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{T_1}{S_1}+e\frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin v}\operatorname{ctg}i\left(\frac{W_1}{S_1}\right)\right]}{\left[1-\operatorname{tg}v\left(1+\frac{r}{p}\right)\frac{T_2}{S_2}+e\frac{r}{p}\frac{\sin u}{\sin v}\operatorname{ctg}i\left(\frac{W_2}{S_2}\right)\right]} \tag{10-184}$$

式中的S、T、W前已说明分别是摄动加速度径向、横向、法向分量，其他符号也同前，$\dot{\omega}_1$及$\dot{\omega}_2$在这里分别表示由于相对论效应和由于地球引力位二阶带谐引起的卫星近地点受摄运动速度。

由于按摄动加速度分量的量级比而言，可以取

$$\left(\frac{T_1}{S_1}\right)\approx\left(\frac{T_2}{S_2}\right),\qquad\left(\frac{W_1}{S_1}\right)\approx\left(\frac{W_2}{S_2}\right)$$

因此近地点受摄运动速度的量级比就可近似认为等于径向摄动加速度量级之比，即

$$\frac{\dot{\omega}_1}{\dot{\omega}_2}=\frac{S_1}{S_2}+\cdots \tag{10-185}$$

根据参考文献[43]，可将卫星近地点相对论受摄运动速度$\dot{\omega}$，表示为

$$\dot{\omega}_1=\overline{\dot{\omega}}_{rel}=3\left(\frac{V_c^2}{c^2}\right)\frac{n}{1-e^2}\left[1-\frac{4}{5}\frac{\nu_E}{n}\left(\frac{a_e}{a}\right)^2\frac{\cos i}{\sqrt{1-e^2}}\right] \tag{10-186}$$

地球引力位二阶带谐摄动引起的卫星近地点运动速度$\dot{\omega}_2$可写为

$$\dot{\omega}_2=\overline{\dot{\omega}}_{J_2}=-\frac{3}{4}J_2\left(\frac{a_e}{r}\right)(5\cos^2 i-1)\cdot n \tag{10-187}$$

上两式中的符号意义如下：

V_c——卫星沿圆轨道（半径＝a）运动的线速度；

ν_E——地球自转角速度；

c——光速；

n——卫星平均运动速度；

a_e——地球赤道半径；

其他符号意义同前。

若取 $J_2 \approx 1.0827\times10^{-3}$，$a=8000\ \mathrm{km}$ $a_e=6378\ \mathrm{km}$

则可求得

$$\frac{\dot{\bar{\omega}}_{rel}}{\dot{\bar{\omega}}_{J_2}}=3.22\times10^{-6}(1-0.04\cos i) \tag{10-188}$$

因此相对论摄动加速度的量级至少相当于 $J_2^3 \sim J_2^4$。

2．现在再对行星摄动加速度作类似的估算。设 $S_1=S_P$ 表示行星摄动径向加速度，$S_2=S_{J_2}$ 表示地球引力位二阶带谐引起的径向加速度。

根据§10.3.1写出的限制三体摄动函数一般表示式（10-52），将它对 r 微分，并顾及 r/r_1，r/Δ 比值微小，取 $r_1\approx\Delta$，从而求出 S_P，再由地球引力位摄动函数展开式求得 S_{J_2}，最后可得

$$\frac{S_P}{S_{J_2}}\approx\frac{1}{3}\ \frac{\mu_P}{\mu}(J_2)^{-1}\cdot\left(\frac{r}{a_e}\right)^3\left(\frac{r}{\Delta_{min}}\right)^3 \tag{10-189}$$

式中 Δ_{min} 表示地球轨道半径 r_E 减行星轨道半径 r_P 之差的最小值，无论对于内行星或外行星都取差值为正。

如果取行星质量及轨道半径的现代数据，对于人造地球卫星轨道半径 $r\approx a=8000\mathrm{km}$ 的情况，可算得 S_P/S_{J_2} 的量级如表 10-3 所示。

表 10-3

行　　星	S_P/S_{J_2}	行　　星	S_P/S_{J_2}
水　　星	0.2×10^{-10}	土　　星	1.4×10^{-11}
金　　星	0.4×10^{-8}	天 王 星	0.2×10^{-12}
火　　星	0.7×10^{-10}	海 王 星	0.7×10^{-13}
木　　星	0.4×10^{-9}		

由此可见，行星摄动加速度一般小于相对论摄动加速度，即使对于影响最大的金星和木星，相对论摄动加速度也差不多要比这两个行星的摄动加速度大 3～4 个量级。

如果我们用（10-125）式估算一下，对于卫星轨道半径 $r=8000\ \mathrm{km}$，测距误差为 1m 的情况，相应的摄动加速度误差为 10^{-5} 量级，这就已经接近于相对论效应引起的摄动加速度量级，因此测距精度若再提高 1～2 个量级，计算相对论效应引起的摄动就有必要了。

§ 10.4　运动微分方程的积分方法

天体运动微分方程，无论是无摄方程或是受摄方程，积分求解的目的是要求出对于任一流动时刻 t 时天体的坐标，或者轨道根数的受摄变化量。这个问题本质上是数学问题，是微分方程的积分求解问题。数学上解不同类型的常微分方程有许多解法，例如常数变易法，级数法，小参数法，等等。但是用于解天体运动微分方程时，由于方程结构复杂，摄动参数众多，不用说精确解，就连近似解也都非常困难。这一点我们在讨论月日摄动的§10.3.2末已经提到过。

近似解可以用解析方法，也可用数值方法，这是天体力学中的基本做法，并且有许多以研究者名字命名的解法。在有些文献著作中，通常把用解析法求解天体受摄运动方程的解称为普遍摄动解，而把用数值方法求得的解称为特别摄动解。

设有微分方程组

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x},\ t) \tag{10-190}$$

初始条件为 t_0、$\vec{x}_0$。根据微分方程柯西（Cauchy）存在定理，如果在初始条件的某个邻域，方程右边的 $|\vec{f}|$ 小于某个不为零的正数 M，即 $|\vec{f}|<M$，则在这个 t_0 的邻域内，方程的解存在，其形式为

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\vec{x},\ t)dt \tag{10-191}$$

这种形式的解就是我们讨论近似积分方法的基础。

10.4.1　解析积分法

1．如果我们采用逐次近似法，则可将（10-191）式写为

$$\left.\begin{aligned}
\vec{x}_1 &= \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\vec{x}_0,\ t)dt \\
\vec{x}_2 &= \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\vec{x}_1,\ t)dt \\
&\vdots \qquad\qquad \vdots \\
\vec{x}_{k+1} &= \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} (x_k,\ t)dt
\end{aligned}\right\} \tag{10-192}$$

式中 $\vec{x}$ 的下标表示近似次序号。

如果象在§10.3.2的做法，在受摄运动方程中构成某些小的摄动参数 σ，这些小参数可以有量纲也可无量纲，于是又可将（10-191）式写成

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\sigma,\ \vec{x},\ t)dt \tag{10-193}$$

并且假定上式能与（10-191）式满足同样的初始条件。如果摄动参数有 Q 个，如我们前面

几节所讨论的那样，卫星受摄运动方程可写为

$$\dot{\vec{x}} = \sum_{q=1}^{Q} \sigma_q \vec{f}_q(\vec{x}, t) \tag{10-194}$$

上式的解可不写成（10-193）式而改写为

$$\vec{x} = \vec{x}_0 + \sum_{q=1}^{Q} \sigma_q \int_{t_0}^{t} \vec{f}_q(\vec{x}, t)dt \tag{10-195}$$

对于最简单的情况，$Q=1$，（10-194）式便是

$$\dot{x}_j = \sigma f_j(x_1, x_2, \cdots, x_n; t) \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{10-196}$$

根据庞卡莱定理上式的解可表示为

$$x_j - x_{j0} = \delta_{xj} = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \varphi_{jk} \tag{10-197}$$

且存在如下关系：

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma^k \varphi_{jk} = \sigma \int_{t_0}^{t} f_j(x_1, x_2, \cdots, x_n; t)dt \tag{10-198}$$

因此由（10-197）式可知

$$\delta x_j = \sigma^1 \varphi_{j1} + \sigma^2 \varphi_{j2} + \sigma^3 \varphi_{j3} + \cdots \tag{10-199}$$

利用（10-198）式的关系，根据庞卡莱定理，可求得

$$\left.\begin{aligned} \varphi_{j1} &= \int_{t_0}^{t} f_j(x_{10} + x_{20} + \cdots + x_{n0}, t)dt \\ \varphi_{j2} &= \sum_{s=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \varphi_{s1} \frac{\partial f_j}{\partial x_{s0}} dt \\ &\vdots \qquad\qquad \vdots \end{aligned}\right\} \tag{10-200}$$

如果有Q个摄动参数，则方程的解为

$$\begin{aligned} \delta x_j = & [\sigma_1 \cdot \varphi_{j,\underbrace{(1,0,0,\cdots,0)}_{n个}} + \sigma_2 \cdot \varphi_{j;\underbrace{(0,1,0,\cdots,0)}_{n个}} + \cdots \\ & + \sigma_Q \cdot \varphi_{j,\underbrace{(0,0,\cdots,0,1)}_{n个}}] + [\sigma_1^2 \cdot \varphi_{j,(2,0,0,\cdots,0)} \\ & + \sigma_2^2 \cdot \varphi_{j,(0,2,0,\cdots,0)} + \cdots + \sigma_Q^2 \varphi_{j,(0,0,\cdots,2)}] \\ & + [\sigma_1\sigma_2 \cdot \varphi_{j,(1,1,0,\cdots,0)} + \sigma_2\sigma_3 \cdot \varphi_{j,(0,1,1,0,\cdots,0)} + \cdots] \\ & + [\sigma_1^3 \cdot \varphi_{j,(3,0,0,\cdots,0)} + \cdots] + \cdots = [一阶摄动] + [二阶摄动] \\ & + [混合(交义)摄动] + [三阶摄动] + \cdots \end{aligned} \tag{10-201}$$

由此可见求解受摄运动方程的复杂性，更何况这里还没有具体写出函数的表达式。如果只考虑一阶摄动，情况就会简单得多。实际上由于卫星的质量相对地很小，通常只计算一阶摄动，最多补充部分二阶摄动就可以了。

2．这里还要说明一种所谓平均法解微分方程组的方法。这种方法首先是一位华裔荷

兰学者（王德波一音译）在本世纪二十年代提出的，后来又经过许多人研究推广并用于天文学。现将此法简述如下：

设有 n 个周期变量 y_1，y_2，…，y_n，给定解析函数 $f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，变量周期相应为 T_1，T_2，…，T_n。则可用下式确定函数 f 的平均值为

$$\overline{f}=\frac{1}{T_1\cdots T_n}\int_0^{T_0}\cdots\int_0^{T_n}f(y_1, \cdots, y_n)dy_1\cdots dy_n \tag{10-202}$$

对于这种情况，称之为函数对变量 y_1，…，y_n 取平均。

在天文学问题中，通常是对所谓快速变量（其周期不大于天体转动周期）取平均。任一近点角M、E 或 v，以及 $u=\omega+v$，人造卫星的直角坐标 x、y、z，速度 $\dot{x}$、$\dot{y}$、$\dot{z}$ 都是快速变量。其他变量则称为缓慢变量，轨道根数Ω、i、a、e、ω 或它们的函数都是缓慢变量。

设用 x 表示任一缓慢变量，用 y 表示任一快速变量，给出如下的方程组：

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}&=\sum_k A_k(x)\sin(a_k y+\alpha_k)\\ \dot{y}&=B_0(x)+\sum_k B_k(x)\cos(b_k y+\beta_k)\end{aligned}\right\} \tag{10-203}$$

式中 a_k、α_k、b_k、β_k 是任一实数，假定 $a_k y$、$b_k y$ 的周期为 2π，则将上式右边对 $a_k y$、$b_k y$ 取平均，便得平均方程组

$$\overline{\dot{x}}=0,\qquad \overline{\dot{y}}=B_0(x) \tag{10-204}$$

显然，这样就把上式中变量$\overline{x}$、$\overline{y}$简单地分开了。

若初始条件为 t_0、x_0、y_0，则上式解的形式为

$$\overline{x}=x_0,\qquad \overline{y}=y_0+qt \tag{10-205}$$

其中，$q=B_0(x_0)$。这种 qt 的项随时间单调变化，称为长期变化。

将（10-205）式代入（10-203）式并积分，就可求得一次近似结果为

$$\left.\begin{aligned}x^{(1)}&=x_0-\sum_k\frac{A_k(x_0)}{a_k q}\cos[a_k qt+(a_k y_0+\alpha_k)]+c_x\\ y^{(1)}&=y_0+qt+\sum_k\frac{B_k(x_0)}{b_k q}\sin[b_k qt+(b_k y_0+\beta_k)]+c_y\end{aligned}\right\} \tag{10-206}$$

式中积分常数c_x、c_y可按常规求法用初始条件确定，上式中含有因子

$$a_k q\geqslant 1,\ b_k q\geqslant 1$$

的周期项，称为短周期项；若

$$a_k q<1,\ b_k q<1$$

则相应项称为长周期项。由于每项的周期为 $2\pi/a_k q$ 或 $2\pi/b_k q$，故短周期项的周期不大于 2π，而长周期项的周期则大于 2π。

如果 $a_k q\to 0$，$b_k q\to 0$，就可能出现长周期项的极限情形，含有这样因子的项就称为共振项。这种共振项可能有很大的振幅和周期。但这并不意味一旦有了形成共振的条件就会在未知变量的全部变化区间内都保持如此，因为（10-206）式仅是一次近似解，而在以

后的各次近似中共振条件可能抵消或是大大衰减。

在推导人造卫星轨道根数摄动的近似解析式时，上述平均法用得最普遍。这种情况下，(10－205) 式的第一式用于表示拉格朗日方程 (10－30) 中任一位置根数 a、e、i，第二式用于表示任一角根数 Ω、ω、M。由于在人造卫星运动问题中，常常只研究一个快速度量即平近点角M，因此仅对M取平均。

上述长期项、短周期项、长周期项及共振项，在天体力学上常分别称为长期、短周期、长周期及共振摄动。

有关解析法的其他方法这里不再一一列举。

10.4.2 数值积分法

由于解析积分法工作量太大，而且用解析法算出的卫星受摄坐标常常还不能满足所需的精度要求，因此在许多情况下数值积分法就受到了重视。因为它的基本思想比较简明，计算结果的精度可以很高，特别是在广泛使用电子计算机的现在，它的优点就更为突出。

但是解析法在求解卫星大地测量问题中仍有重要作用，例如可以用于建立改正数方程（参见第十一章）。

由于数值积分法在专门著作中有详细的论述，例如可参阅参考文献 [21]，故本节只作扼要说明。

设给定微分方程组

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x},\ t)$$

初始条件为t_0，$\vec{x}_0$，要求求出$\vec{x}$的分量在t_1，t_2，…，t_i，t_{i+1}等点的数值。我们可以组成差数

$$t_j - t_{j-1} = h_j \qquad (j = 1,\ 2,\ \cdots) \tag{10-207}$$

称为积分步长，它可以是常数，也可以是变数。求解的过程是，将给定微分方程组在区间 $[t_{j-1},\ t_j]$ 内展开为泰勒级数，即

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_j = &\ \vec{f}(\vec{x}_{j-1},\ t_{j-1}) + \\ &+ \frac{1}{1!}\frac{d\vec{f}(\vec{x}_{j-1},\ t_{j-1})}{dt_{j-1}}h_j + \cdots \\ &+ \frac{1}{n!}\frac{d^n\vec{f}(\vec{x}_{j-1},\ t_{j-1})}{dt^n_{j-1}}h^n_j + \vec{R}^{(n+1)}\end{aligned} \tag{10-208}$$

根据所需精度舍去$h^{(n+1)}$阶的项，也就是使余项$|R^{(n+1)}|$小于给定的正数。然后我们简写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{x}}_j &= \sum_{k=0}^{n} \vec{a}_k^{(j-1)} \cdot h_j^k \\ \vec{a}_k^{(j-1)} &= \vec{a}_k(t_{j-1})\end{aligned}\right\} \tag{10-209}$$

如果级数中的各阶导数，或上式中的系数，在任一点都容易求出，则方程组的求解便能很

快实现。设 $j=1$，即 $t=t_0$，$x=x_0$，则积分后可求得 t_1 点的 $\vec{x}_1$

$$\vec{x}_1=\vec{x}_0+\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{(k+1)}\vec{a}_k^{(0)}\cdot h_1^{(k+1)} \tag{10-210}$$

然后取 $\vec{x}_1$、t_1 作为新的初始条件，重复上述求解，算出 $\vec{a}_k^{(1)}$ 及 t_2 点的 $\vec{x}_2$

$$\vec{x}_2=\vec{x}_1+\sum_{k=0}^{s}\frac{1}{(k+1)}\vec{a}_k^{(1)}\cdot h_2^{k+1} \tag{10-211}$$

依此类推，可再求得 t_3 点的 $\vec{x}_3$，t_4 点的 $\vec{x}_4$ 等等。

但是在绝大多数情况下，要想非常简单而又可靠地算出（10-208）式中各阶导数，是做不到的，因为计算公式太复杂。所以还要设法避免计算各阶导数而用计算相应于各阶导数的其他量来代替它。

首先说明关于有限差的计算。

设给定函数 $f(t)$，且对于变量 t_j 的 f_j 值已知（$j=0$，±1，±2，…），这样便可列出一个交点函数值表，函数值 f_{j+1} 和 f_j 对应于 t_{j+1} 和 t_j，我们用 $h=t_{j+1}-t_j$ 表示相邻函数值的间隔（这里先假定是常数），也称为步长，而把函数值差（$f_{j+1}-f_j$）称为表差。于是可由函数值表组成各种差值，如表 10-4 所示。表中各次差的计算规则为

表 10-4

t	函数值	一次差	二次差	三次差	四次差
t_{-2}	f_{-2}		·	·	·
		$\Delta^1 f_{-3/2}$	·	·	·
t_{-1}	f_{-1}		$\Delta^2 f_{-1}$	·	·
		$\Delta^1 f_{-1/2}$	$(\Delta^2 f_{-1/2})$	$\Delta^3 f_{-1/2}$	·
t_0	f_0	$(\Delta^1 f_0)$	$\Delta^2 f_0$	$(\Delta^3 f_0)$	$\Delta^4 f_0$
		$\Delta^1 f_{1/2}$	$(\Delta^2 f_{1/2})$	$\Delta^2 f_{1/2}$	·
t_1	f_1		$\Delta^2 f_1$	·	·
		$\Delta^1 f_{3/2}$	·	·	·
t_2	f_2	·	·	·	·

$$\left.\begin{aligned}
&\cdots\Delta^1 f_{-\frac{1}{2}}=f_0-f_{-1},\quad \Delta_1 f_{\frac{1}{2}}=f_1-f_0,\\
&\qquad\qquad \Delta^1 f_{3/2}=f_2-f_1,\ \cdots\\
&\cdots\Delta^2 f_{-1}=\Delta^1 f_{-\frac{1}{2}}-\Delta^1 f_{-3/2},\\
&\qquad\qquad \Delta^2 f_0=\Delta^1 f_{\frac{1}{2}}-\Delta^1 f_{-\frac{1}{2}},\ \cdots\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}\right\} \tag{10-212}$$

表中圆括号内的各次差称为中心差，如下计算

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta^1 f_0=\frac{1}{2}(\Delta^1 f_{\frac{1}{2}}+\Delta^1 f_{-\frac{1}{2}}),\ \cdots\\
&\cdots\ \Delta^2 f_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\Delta^2 f_0+\Delta^2 f_1),\\
&\Delta^2 f_{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}(\Delta^2 f_{-1}+\Delta^2 f_0),\ \cdots\\
&\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots
\end{aligned}\right\}
\tag{10-213}
$$

组成上述这些函数差值后，就能利用数学上各种著名的内插或外推插值公式算出不属于表列t_j点的函数近似值。由于这些插值公式都能表示为h的幂多项式，其系数可用有限差表示，如果将所选用的插值公式微分必需的次数，便可求得函数f的一阶、二阶、…导数的表示式，用以取代（10-208）式中的各阶导数，将这些导数的有限差表示式代入后，合并h幂的同类项并积分，便可求得相应于原内插或外推公式的数值积分公式。

下面列出几种适用于卫星大地测量的数值积分公式：

一、用于$\dot{x}=f(x,\ t)$形微分方程的公式

令

$$
\varphi(x,\ t)=hf(x,\ t)
\tag{10-214}
$$

（1）亚当斯（Adams）法（外推）公式

$$
\begin{aligned}
x_{j+1}=&x_j+\varphi_j+\frac{1}{2}\Delta^1\varphi_{j-\frac{1}{2}}+\frac{5}{12}\Delta^2\varphi_{j-1}\\
&+\frac{3}{8}\Delta^3\varphi_{j-\frac{3}{2}}+\frac{251}{720}\Delta^4\varphi_{j-2}+\frac{95}{288}\Delta^5\varphi_{j-\frac{5}{2}}+\cdots
\end{aligned}
\tag{10-215}
$$

（2）亚当斯法（内插）公式

$$
\begin{aligned}
x_{j+1}=&x_j+\varphi_{j+1}-\frac{1}{2}\Delta^1\varphi_{j+\frac{1}{2}}-\frac{1}{12}\Delta^2\varphi_j\\
&-\frac{1}{24}\Delta^3\varphi_{j-\frac{1}{2}}-\frac{19}{720}\Delta^4\varphi_{j-1}-\frac{9}{160}\Delta^5\varphi_{j-\frac{3}{2}}-\cdots
\end{aligned}
\tag{10-216}
$$

（3）科尔（Cowell）法（内插）公式

$$
x_{j+1}=x_j+\varphi_j+\frac{1}{2}\Delta^1\varphi_j+\frac{1}{6}\Delta^2\varphi_j-\frac{1}{24}\Delta^3\varphi_j-\frac{1}{720}\Delta^4\varphi_j-\cdots
\tag{10-217}
$$

二、用于$\ddot{x}=f(x,\ t)$形微分方程的公式

令

$$
\varphi(x,\ t)=h^2 f(x,\ t)
\tag{10-218}
$$

（1）亚当斯法公式

$$
\begin{aligned}
x_{j+1}=&2x_j-x_{j-1}+\varphi_j+\frac{1}{12}\Delta^2\varphi_{j-1}+\frac{1}{12}\Delta^3\varphi_{-j\,\frac{3}{2}}\\
&+\frac{19}{240}\Delta^4\varphi_{j-2}+\frac{863}{12096}\Delta^5\varphi_{j-\frac{5}{2}}+\cdots
\end{aligned}
\tag{10-219}
$$

（2）科尔法公式——（Ⅰ）

$$x_{j+1}=2x_j-x_{j-1}+\varphi_j+\frac{1}{12}\Delta^2\varphi_j-\frac{1}{240}\Delta^4\varphi_j+\frac{31}{60480}\Delta^6\varphi_j-\cdots \tag{10-220}$$

（3）科尔法公式——（Ⅱ）

$$x_{j+1}=\Delta^{-2}\varphi_{j+1}+\frac{1}{12}\varphi_{j+1}-\frac{1}{240}\Delta^2\varphi_{j+1}+\frac{31}{60480}\Delta^4\varphi_{j+1}-\cdots \tag{10-221}$$

式中 $\Delta^{-2}\varphi$ 称为二次和，类似地 $\Delta^{-1}\varphi$ 则称为一次和。同样可利用（10-218）式算出各个 φ 值，然后列出各次和与各次差的函数表，从而求出所需的一次和，二次和，…。例如：

$$\Delta^{-1}\varphi_{-\frac{1}{2}}=h\dot{x}_0+\frac{191}{120960}(\varphi_3-\varphi_{-3})-\frac{211}{15120}(\varphi_2-\varphi_{-2})$$
$$+\frac{7843}{120960}(\varphi_1-\varphi_{-1})-\frac{1}{2}\varphi_0$$

$$\Delta^{-2}\varphi_0=x_0+\frac{289}{36268800}(\varphi_3+\varphi_{-3})-\frac{599}{604800}(\varphi_2+\varphi_{-2})$$
$$+\frac{1793}{241920}(\varphi_1+\varphi_{-1})-\frac{2497}{25920}\varphi_0 \tag{10-222}$$

如果为了保证计算精度，每次积分只在

$$j=-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$$

这个范围内进行，算出相应的 φ 值，利用（10-222）和（10-221）式便可解出各相应的未知 x 值，即

$$\begin{pmatrix}x_{-3}\\x_{-2}\\x_{-1}\\x_0\\x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\Delta^{-2}\varphi_0+\Delta^{-1}\varphi_{-\frac{1}{2}}\begin{pmatrix}-3\\-2\\-1\\0\\1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{-3}&b_{-3}&c_{-3}&d_{-3}&c_3&b_3&a_3\\a_{-2}&b_{-2}&c_{-2}&d_{-2}&c_2&b_2&a_2\\a_{-1}&b_{-1}&c_{-1}&d_{-1}&c_1&b_1&a_1\\a_0&b_0&c_0&d_0&c_0&b_0&a_0\\a_1&b_1&c_1&d_1&-c_{-1}&b_{-1}&-a_{-1}\\a_2&b_2&c_2&d_2&c_{-2}&b_{-2}&a_{-2}\\a_3&b_3&c_3&d_3&c_{-1}&b_{-3}&a_{-3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_{-3}\\\varphi_{-2}\\\varphi_{-1}\\\varphi_0\\\varphi_1\\\varphi_2\\\varphi_3\end{pmatrix} \tag{10-223}$$

式中：

$$a_{-3}=\frac{237671}{3628800}\qquad b_{-3}=\frac{645569}{604800}$$

$$a_{-2}=\frac{-9829}{3628800}\qquad b_{-2}=\frac{7297}{86400}$$

$$a_{-1}=\frac{1571}{3628800}\qquad b_{-1}=\frac{-1157}{201600}$$

$$
\begin{aligned}
&a_0=\frac{-289}{3628800} && b_0=\frac{599}{604800}\\
&a_1=a_0 && b_1=\frac{289}{604800}\\
&a_2=a_{-1} && b_2=\frac{-209}{67200}\\
&a_3=a_{-2} && b_3=\frac{11729}{604800}\\
&c_{-3}=\frac{91415}{48384} && d_{-3}=\frac{18937}{181440}\\
&c_{-2}=\frac{27163}{26880} && d_{-2}=\frac{-2873}{181440}\\
&c_{-1}=\frac{3233}{34560} && d_{-1}=\frac{-839}{181440}\\
&c_0=\frac{-1793}{241920} && d_0=\frac{2497}{25920}\\
&c_1=\frac{-11}{16128} && d_1=\frac{180601}{181440}\\
&c_2=\frac{463}{48384} && d_2=\frac{360007}{181440}\\
&c_3=\frac{-14513}{241920} && d_3=\frac{563257}{181440}
\end{aligned}
\tag{10-224}
$$

最后，要说明以下几点：

（1）由上面列出的几种数值积分公式可以看出，如果在积分公式（例如(10-215)或(10-221)式）中用到n次差，就必须先知道$n+1$个x值，但通常只已知初始条件决定的x_0，所以其余的x值要用另外的办法计算，例如用解析法，或者利用（10-217)、(10-218）式，先令所有的φ_j（$j\neq 0$，$-3\leqslant j\leqslant 3$）等于φ_0，求出x_j的近似值，然后重算φ_j，求一次和、二次和的精确些的值，以及x_j的精确些的值。如此逐次趋近，直到求出符合精度要求的结果。

（2）为了防止计算误差积累，每次积分的范围不宜过大，而且下一次积分的初始条件应与上次积分的初始条件只隔一个步长，即只能将上次的积分表往下移一个步长（用上次求得的t_1时刻的x_1，作为下一次积分的初始值x_0）。

（3）相对而言，科尔法比其他方法计算速度要稍慢些，但是科尔法积分公式的数字系数递减得最快，并且用到的是中心差，舍入误差一般较小，精度较高，因此用于卫星大地测量有其独特的优点。

（4）还有许多数值积分方法可以应用，例如著名的龙格-库塔（Runge-Kutta）法，泰勒级数法，等等。这里不再一一介绍。

第十一章 动力测地的基本内容和方法

§11.1 表征地球形状及重力场的大地测量基本参数

我们在第一章中曾经讲过，真实地球的形状表面可以用大地水准面来表示，而大地水准面要用平均（地球）椭球来数学逼近。平均椭球又是由一些几何参数和物理参数定义的。从几何意义上讲，平均椭球的赤道半径 a_e 和几何极扁率 f 确定它的大小和形状（如果是三轴椭球，还要包括赤道椭圆的扁率 f_e 和赤道半长轴的方向 λ_a）；从物理意义上讲，平均（地球）椭球的总质量等于地球的总质量 M_e，它所形成的重力场是正常重力场，椭球面上的赤道重力为 γ_e，不同纬度处的正常重力 γ 服从正常重力分布规律。

地球是旋转体，平均椭球也定义为旋转体，其旋转角速度等于地球自转角速度 ω_e。若取平均椭球面的正常重力位等于大地水准面上的位值 W_0，于是根据重力位球谐展开式，当取 $n=2$ 时，可将平均椭球面赤道上一点的地心距 r 和正常重力 γ_e 表示为

$$r=\frac{GM_e}{W_0}\left(1-J_2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{\omega_e^2a_e^3}{GM_e}\sin^2\theta\right) \tag{11-1}$$

$$\gamma_e=\frac{GM_e}{r^2}\left[1-3\left(\frac{a_e}{r}\right)^2J_2\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)-\frac{\omega_e^2a_e^3}{GM_e}\sin^2\theta\right] \tag{11-2}$$

其中 $\theta=90°-\varphi$ 为余纬度。

令上两式中的

$$\frac{\omega_e^2a_e^3}{GM_e}=m\approx\frac{\omega_e^2a_e}{\gamma_e} \tag{11-3}$$

这是赤道离心加速度与赤道重力之比值。

再令

$$R_0=\frac{GM_e}{W_0} \tag{11-4}$$

称为引力比例系数。

平均椭球应该与大地水准面拟合得最好，两曲面之间的相对起伏（既大地水准面相对平均椭球面的差距，或称大地水准面高度）N 的平方和应为最小。而且垂线偏差的子午分量 ξ、卯酉分量 η 的平方和（$\xi^2+\eta^2$）之总和也为最小，真实重力与正常重力之差，即重力异常 Δg 的平方和也为最小。

垂线偏差的变化反映了两曲面的相对曲率变化，因此可以根据曲面几何理论分别求出两曲面的高斯曲率和平均曲率，组成差值，此差值的总和也应为最小。

以上列出的对于正常地球重力场而言的参数 GM_e、W_0、R_0、a_e、f、γ_e、J_2、ω_e，

再加上真空光速 c 和地球大气层的地心引力常数 GM_A，常称为大地测量基本常数。这里的 M_A 是地球大气层的质量。

这些常数的采用值有些是要通过有关科学学科协商确定的。例如光速 c，万有引力常数G，都是采用物理学家测算求得的精确值；地球自转角速度 ω 则采用天文学家精确测算的数值。其余常数则由大地测量学家采用各种不同的方法推算求得。每届国际大地测量学协会（IAG）全体大会都要讨论审定各常数新的采用值，有的值变动有的值不改。表11-1列出了以上常数的具体数值。

参考文献［36］将大地测量基本参数按其量级大小作了分类。例如将GM、R_0、a_e、γ_e等称为零阶参数；将几何扁率α（或第一偏心率e^2，第二偏心率e'^2），重力扁率β（$=(\gamma_p-\gamma_e)/\gamma_e$；$\gamma_p$为极正常重力）以及$J_2$（也可称为动力学扁率）等，称为扁率阶参数。量级更小的，如J_4、J_6等，就称为高阶参数。

为了求定正常地球的全部参数，只要给定ω值和两个零阶参数以及一个扁率阶参数就够了。例如给定ω、GM、a_e、α（或e^2）或者J_2。所以国际上常用这样四个基本参数来定义大地测量参考系，以及与之相应的水准椭球。此外，在GM中又常将大气层质量M^A（$=0.89\times10^{-6}M_e$）包括在内而不单独分开，例如1983年IAG汉堡大会就是这样规定的。

由于推算各常数可以用不同的方法（如天文大地测量方法、重力测量方法、卫星大地测量方法），以及使用不同数量或不同精度的观测资料，因此所得结果的尾数可能不完全相同。但从表11-1中可以看出，近十多年来各次公布的数值相互差别已大大减少，这主要是由于采用了现代空间技术和卫星方法，而且光速 c 和地球自转角速度ω的数值确定得非常精确的缘故。

表 11-1

常　数	符　号	度量单位	1975年推荐值	1980年采用值*)
真空光速	c	$m\cdot s^{-1}$	299792458±1.2	同　左
万有引力常数	f, G	$10^{-14}m^3\cdot s^{-2}\cdot kg^{-1}$	6672±4.1	同　左
地球自转角速度	ω	$10^{-11}rad\cdot s^{-1}$	7292116	7292115
地心引力常数	GM	$10^8m^3\cdot s^{-2}$	3986005±3	3986005±0.5
大气层地心引力常数	GM_A	10^7s	35±0.3	同　左
带球谐系数	J_2	10^{-8}	108263±1	108263±0.5
地球赤道半径	a, a_e	m	6378140±5	6378137±2
赤道重力	r_e	$10^{-5}m\cdot s^{-2}$	978032±1	978033±1
几何扁率倒数	$1/f$, $1/\alpha$	10^{-3}	298257±1.5	298257±1
大地水准面重力位	W_0	$10^1m^2\cdot s^{-2}$	6263683±5	6263686±3
线性比例系数	R_0	m	6363676±5	

*）直到1986年表中所列数值尚未见改变。

以下几节我们首先介绍利用卫星轨道摄动解决大地测量动力学问题的一般原理，然后分别讨论如何计算地球引力位动力系数、大地水准面位值和地心矢径以及大地水准面高

度，最后介绍用卫星方法建立地心坐标系的原理。

§11.2 利用卫星轨道摄动解决大地测量动力学问题的一般原理

11.2.1 大地测量应用上的基本特点和要求

回顾第二章讲过的内容，可以知道，卫星方法在大地测量上的直接应用一是为了测定地面测站点的地心坐标或相对坐标，二是为了求出能描述地球形状及重力场的某些量。如果采用球谐函数来作数学近似，则从球谐展开式可以看出，不规则质量分布的地球体与点质量体的差别，是由含带、扇、田谐系数的各项来表示的，因此这些系数便是所求的量。由于是将地球引力位表示为球谐展开式的，所以这些系数就称为位系数或球谐动力系数。卫星方法用于这里，就是利用卫星轨道根数摄动与这些系数项的对应关系，求出摄动量，从而算出相应的位系数。

由§10.4.1可知，卫星轨道摄动可以分为长期项，长周期项，短周期项和共振项。而引力位中与经度无关的带谐系数项主要对应于长期和长周期摄动，与经度有关的田（扇）谐系数项主要对应于短周期摄动和共振摄动。如果我们写出某一时刻 t 卫星的受摄位置矢量的函数式，它就应该包含某初始时刻 t_0 的六个轨道根数 $\vec{E}_0$、地心引力常数 $GM_\oplus$ 和时间 t，以及无穷多阶的带、田（扇）谐项。因此，即使取有限阶项，若阶数过多，求解也极困难。况且摄动的因素除地球不规则引力场外，还有许多其他因素。此外，若按摄动量的大小来分，又有一阶摄动，二阶摄动等等。这样，问题就更加复杂。

如果对卫星受摄运动方程积分采取§10.4.1中所讲的平均法，在变量周期区间内积分，则周期性摄动就可分离出来。这就有可能将带谐性摄动与田（扇）谐性摄动分开处理。另一方面，如我们在§2.9.2中分析过的，大地测量上利用的卫星轨道摄动主要是交点和近地点的受摄长期性变化，因而又可使解算工作减少。

为了使卫星轨道摄动用于大地测量能获得尽可能好的精度，并且使工作尽可能简便，应当充分发挥电子计算机的作用，并使计算方法与之相适应。为此，可以提出如下几点原则要求：

（1）计算卫轨摄动主要计算一阶摄动，如有必要，最多再计算部分二阶摄动。

（2）量级最大的摄动用解析展开式计算，其余的用数值积分法计算。

（3）数值积分法应该采用受摄轨道根数方程，而不能用坐标分量表示的运动方程，因为三个坐标分量都是快速变量。

（4）解析积分法采用受摄轨道根数方程也是方便的，因为只有一个简单快速变量—卫星的平近点角。

（5）大地测量上需要的计算结果，除了卫星轨道根数受摄变化量和带、田谐位系数外，还应包括卫星的受摄坐标及速度分量，因为在某些方法（例如卫星测高法）中要用到受摄坐标。

（6）引力性质的摄动与非引力性质的摄动应分开计算，前者可采用拉格朗日方程

(10-30)，后者应采用牛顿方程（10-38)。

11.2.2 一阶摄动近似解析积分的计算

现在我们讨论引力性质的摄动的计算过程。为此将拉格朗日方程（10-30）式简写成如下形式：

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{E}}_a &= L\cdot(\vec{\partial}_b R)\\ \dot{\vec{E}}_b &= -L^T\cdot(\vec{\partial}_a R)\end{aligned}\right\} \tag{11-5}$$

式中

L——拉格朗日矩阵（参见（10-30）式）；　L^T 是其转置阵；

$\dot{\vec{E}}_a$——$\dot{a}$，$\dot{e}$，$\dot{i}$ 构成的列矢量；

$\dot{\vec{E}}_b$——$(\dot{M}-n)$，$\dot{\Omega}$，$\dot{\omega}$ 构成的列矢量；

$\vec{\partial}_b$——$\frac{\partial}{\partial M}$，$\frac{\partial}{\partial \Omega}$，$\frac{\partial}{\partial \omega}$ 构成的列矢量；

$\vec{\partial}_a$——$\frac{\partial}{\partial a}$，$\frac{\partial}{\partial e}$，$\frac{\partial}{\partial i}$ 构成的列矢量。

由于拉格朗日矩阵仅与缓慢变量有关，因此取第一次近似，（11-5）式的积分可写为

$$\left.\begin{aligned}\vec{E}_a^{(1)} &= \vec{E}_{a0} + L\int_{t_0}^{t}(\vec{\partial}_b R)dt\\ \vec{E}_b^{(1)} &= \vec{E}_{b0} - L^T\int_{t_0}^{t}(\vec{\partial}_a R)dt\end{aligned}\right\} \tag{11-6}$$

算符$\vec{\partial}_b$及$\vec{\partial}_a$的运算，除 $\dot{a}$ 和 $\dot{e}$ 中含有的$\frac{\partial R}{\partial M}$外，全都是对缓慢变量微分，而

$$\frac{\partial R}{\partial M} = \frac{1}{n}\frac{\partial R}{\partial t} \tag{11-7}$$

其中 n 是卫星平均运动速度，因此（11-6）式可改写为

$$\delta\vec{E}_a^{(1)} = \vec{E}_a^{(1)} - \vec{E}_{a0} = L\cdot\vec{\partial}_b\int_{t_0}^{t} Rdt \tag{11-8}$$

$$\delta\vec{E}_b^{(1)} = \vec{E}_b^{(1)} - \vec{E}_{b0} = -L^T\cdot\vec{\partial}_a\int_{t_0}^{t} Rdt \tag{11-8}$$

其中所含的

$$\frac{\partial}{\partial M}\left(\int_{t_0}^{t} Rdt\right) = \frac{1}{n}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial R}{\partial t}dt = \frac{1}{n}(R - R_{t_0}) \tag{11-9}$$

上式中R_{t_0}是初始时刻t_0的摄动函数值。

如果以轨道半长轴 a 为例，根据（10-30）及（11-9）式便可得

$$\delta_a^{(1)} = \frac{2}{n}\sqrt{\frac{a}{\mu}}(R - R_{t_0}) \tag{11-10}$$

由于我们曾用（10-39）式表示

$$\dot{M} - n = \dot{M}_0$$

因此，若用$\delta M_0^{(1)}$作为上式右边积分的结果，取（10-41）式的第一项代入（10-40）式，并顾及（11-10）式，便得

$$\delta M^{(1)} = \delta M_0^{(1)} + \frac{3}{\sqrt{\mu a}}[R_{t_0}(t - t_0) - \int_{t_0}^{t} R dt] \tag{11-11}$$

这是拉格朗日方程中唯一的快速变量的一阶摄动表示式。现在我们将（11-5）形式的该方程先按M取平均，这就等于对摄动函数按下式平均：

$$\overline{R} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R dM \tag{11-12}$$

根据第十章讲过的理由，摄动函数R可表示为

$$R = R_0\ (a,\ e,\ i\ ) + \text{周期项} \tag{11-13}$$

所以这里的$\overline{R}$应为

$$\overline{R} = R_0\ (a,\ e,\ i\ ) \tag{11-14}$$

这样，类似于（10-204）式，可由（11-5）式求得

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\vec{E}}_a = 0 \\ &\dot{\vec{E}}_b = -L^T[\vec{\partial}_a R_0\ (a,\ e,\ i\ )] \end{aligned}\right\} \tag{11-15}$$

因此相应于（10-205）式，便有

$$\left.\begin{aligned} &\vec{E}_a = \vec{E}_{a0} \\ &\vec{E}_b = \vec{E}_{b0} - (t - t_0)L^T[\vec{\partial}_a R_0(a_0,\ e_0,\ i_0)] \end{aligned}\right\} \tag{11-16}$$

这就表示平均后角量根数仅包含长期摄动。因此

$$\left.\begin{aligned} &\overline{\Omega} = \Omega_0 + \dot{\overline{\Omega}}(t - t_0) \\ &\overline{\omega} = \omega_0 + \dot{\overline{\omega}}(t - t_0) \\ &\overline{M} = M_{i\,s} + \dot{\overline{M}}(t - t_0) \end{aligned}\right. \tag{11-17}$$

式中$M_{i\,s}$表示流动平近点角的无摄值。再由（11-11）式及（10-39）式可得

$$\dot{\overline{M}} = \dot{\overline{M}}_0 + \frac{3}{\sqrt{\mu a}}[R_{t_0} - R_0(a_0,\ e_0,\ i_0)] \tag{11-18}$$

于是我们可将摄动函数R对于任一摄动因素写成最一般形式的展开式为

$$R = R_0(a, e, i) + \sum_k R_k(a, e, i) \cdot \cos(\alpha_k M + \beta_k \Omega + \gamma_k \omega + \delta_k) \tag{11-19}$$

式中 α_k、β_k、γ_k、δ_k 为任意实数，其中 k 是任意整数。而上式中余弦函数前的系数是三个函数的乘积，即

$$R_k(a, e, i) = a^{(m_k)} \cdot A_k^{(i)} \cdot X_k^{(e)} \tag{11-20}$$

式中，a、i、e 是三个轨道根数，m_k 是任意正或负整数，$A_k^{(i)}$ 是倾角 i 的正弦及余弦的幂多项式，$X_k^{(e)}$ 是用汉生系数表示的偏心率 e 的函数。

由于在 $\dot{a}$ 及 $\dot{e}$ 的方程中含有 $\frac{\partial}{\partial M}$，为了方便起见，我们将拉格朗日矩阵分为两个矩阵之和，即

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 \tag{11-21}$$

其中

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 2\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{\mu}} & 0 & 0 \\ \dfrac{1-e^2}{e\sqrt{\mu a}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1-e_2}{e\sqrt{\mu a}} \\ 0 & -\dfrac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} & \dfrac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{\mu a(1-e^2)}} \end{pmatrix} \tag{11-22}$$

这样，根据（11-8）、（11-9）、（11-10）式便可将各轨道根数的一阶摄动写成以下一般形式：

$$\begin{bmatrix} \delta a^{(1)} \\ \delta e^{(1)} \\ \delta i^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{1}{n}\boldsymbol{L}_1 \begin{bmatrix} R - R_{t_0} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \boldsymbol{L}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \Omega} \\ \dfrac{\partial}{\partial \omega} \end{pmatrix} \cdot \int_{t_0}^{t} R dt \tag{11-23}$$

$$\begin{bmatrix} \delta M_0^{(1)} \\ \delta \Omega^{(1)} \\ \delta \omega^{(1)} \end{bmatrix} = -\boldsymbol{L}^T \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial a} \\ \dfrac{\partial}{\partial e} \\ \dfrac{\partial}{\partial i} \end{pmatrix} \int_{t_0}^{t} R dt \tag{11-24}$$

其中

$$\delta M_0^{(1)} = \int_{t_0}^{t} (\dot{M} - n)\,dt \tag{11-25}$$

若用（11-17）式表示的平均值置换（11-19）式中的M、Ω、ω，则得

$$R = R_0 + \sum_k R_k \cos[A_k(t-t_0) + B_k + \delta_k] \tag{11-26}$$

其中

$$\begin{aligned} A_k &= \alpha_k(n + \overline{\dot{M}}) + \beta_k \overline{\dot{\Omega}} + \gamma_k \overline{\dot{\omega}} \\ B_k &= \alpha_k M_0 + \beta_k \Omega_0 + \gamma_k \omega_0 \end{aligned} \tag{11-27}$$

（11-26）式的积分可近似写为

$$J_R = \int R dt = R_0 t + \sum_k \frac{R_k}{A_k} \sin[A_k(t-t_0) + B_k + \delta_k] \tag{11-28}$$

下面我们归纳一下关于一阶摄动的计算过程：

1．所用出发公式

（1）拉格朗日方程（10-30）式，

（2）摄动函数一般展开式（11-19）式。

2．计算次序

（1）从R中分离出$\overline{R}$，并求出长期（平均）值$\overline{\Omega}$、$\overline{\omega}$、$\overline{M}$；

（2）将$\overline{\Omega}$、$\overline{\omega}$、$\overline{M}$代入出发摄动函数R的展开式（11-19），并按（11-28）式求积分，其中系数用（11-20）、（11-27）式计算；

（3）用下式求（11-28）式的积分常数C_J

$$\begin{aligned} C_J &= \int_{t_0}^{t} R dt - J_R \\ &= -\left[R_0 t + \sum_k \frac{R_k}{A_k} \sin(B_k + \delta_k)\right] \end{aligned} \tag{11-29}$$

（4）用（11-28）、（11-29）、（11-23）式求$\delta a^{(1)}$、$\delta e^{(1)}$、$\delta i^{(1)}$，其中矩阵L_1及L_2用（11-22）式计算，算符$\frac{\partial}{\partial\Omega}$，$\frac{\partial}{\partial\omega}$的作用就成了将（11-28）及（11-29）式中角量根数的正弦换成余弦；

（5）将（11-28）及（11-29）式代入（11-24）式，求出$\delta M_0^{(1)}$、$\delta\Omega^{(1)}$、$\delta\omega^{(1)}$，计算前先求出转置阵L^T；

（6）算符$\frac{\partial}{\partial a}$是将（10-20）式中的$a^{(m_k)}$变成$m_k a^{(m_k-1)}$，算符$\frac{\partial}{\partial i}$是将$A_k(i)$换成导数$\frac{d}{di}A_k(i)$，而算符$\frac{\partial}{\partial e}$则是将汉生系数换成它的导数；

（7）最后，将$\delta M_0^{(1)}$和$\int_{t_0}^{t} Rdt$代入（11-11）式，即可求得$\delta M^{(1)}$。

以上是以拉格朗日方程为出发公式计算一阶摄动一次近似值的整个过程，其中快速变

量是平近点角M。如果为了计算非引力性质的摄动，采用牛顿方程（10-38）式，可以看出，该方程中快速变量是真近点角v，系数矩阵也复杂得多，因而整个计算过程更为复杂，需要采取若干麻烦的变换，我们这里不再讨论。

因此，参考文献［33］认为，由于大气层模型的精度还不能适应大地测量上计算大气阻力摄动改正的精度要求，同时为了避免采用牛顿方程带来的困难，主张在解决大地测量动力学问题时，采用不低于1000km高度而且面积质量比小的卫星，这样就可以仍用拉格朗日方程作为出发方程，而且在计算大气层阻力摄动改正时也要简单得多。

11.2.3 卫星动力法一般方程

我们在§2.2中曾经写出过一个基本关系式（2-1），并且在第十章开头提到过，现在要根据它写出动力法一般方程，并讨论如何具体计算。重写该方程如下：

$$\vec{\rho}=\vec{r}-\vec{r}' \tag{11-30}$$

式中$\vec{\rho}$是测站的地心矢量，$\vec{r}$是卫星的地心矢量，$\vec{r}'$是卫星的站心矢量。若对上式微分，并改写成增量形式，则有

$$\overrightarrow{\Delta\rho}=\overrightarrow{\Delta r}-\overrightarrow{\Delta r'} \tag{11-30a}$$

由于$\vec{r}'$可以在测站上用各种方法观测求得，也可用卫星在某初始时刻的坐标（或观测时刻的受摄坐标）和测站坐标计算而得。若分别用$\vec{r}'_{ob}$和$\vec{r}'_{ca}$表示由观测求得的和由计算求得的站心矢量，并用两者之差表示$\overrightarrow{\Delta r'}$，则上式可改写为

$$\vec{r}'_{ob}-\vec{r}'_{ca}=\overrightarrow{\Delta r}-\overrightarrow{\Delta\rho} \tag{11-31}$$

式中，$\overrightarrow{\Delta r}$表示卫星地心矢量的改正，$\overrightarrow{\Delta\rho}$表示测站地心矢量的改正。

如果考虑到可能有许多测站同时对卫星观测，则$\overrightarrow{\Delta\rho}$就应表示为由各测站改正数组成的矢量。又由于卫星受到许多摄动因素影响，则$\overrightarrow{\Delta r}$也应表示为这些摄动因素引起的受摄总改正，而这种受摄改正又常分解为卫星轨道根数在初始时刻的受摄变化和一些微小摄动参数的影响。因此，从测量平差的角度上看，（11-31）式的左边可作为改正数方程的自由项，右边则应包括轨道根数改正、测站坐标改正、摄动参数改正这三个未知数。因此如果用q表示上式中的$\vec{r}'$，则可将（11-31）式表示为

$$q_{ob}-q_{ca}=\frac{\partial q}{\partial E_0}dE_0+\frac{\partial q}{\partial\rho}d\rho+\frac{\partial q}{\partial\sigma}d\sigma \tag{11-32}$$

式中E_0表示初始时刻t_0已知的轨道根数，它可表示六个根数的任一个，ρ可表示所有测站的任一个，σ是微小摄动参数，同样也是广义的。

（11-32）式就是卫星动力法的一般方程，其中dE_0、$d\rho$、$d\sigma$是待求的未知改正数，只要计算出它们前面的系数，便能用最小二乘法求解。

dE_0的系数可改写为

$$\frac{\partial q}{\partial E_0}=\frac{\partial q}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial E_0} \tag{11-33}$$

又因任一受摄轨道根数E可表示为初始时刻的E_0再加上从初始时刻到观测时刻这段时间内的受摄改正δE，即

$$E = E_0 + \delta E \tag{11-34}$$

所以

$$\frac{\partial E}{\partial E_0} = 1 + \frac{\partial(\delta E)}{\partial E_0} \tag{11-35}$$

下面分别讨论（11-32）式各系数和左边自由项的计算：

1．计算 $q_{ob} - q_{ca}$

（1）为简单起见，假定只在一个测站上观测，并且连续在时刻 t_1，t_2，$\cdots t_j$，$\cdots t_n$ 进行了观测。观测方法已在第二章讲过，例如可求得观测值为站心赤经、赤纬（α'，δ'）、测站到卫星的距离 r' 以及径向速度 $\dot{r}'$ 等。总之，可求得任一观测时刻 t_j 的站心观测值 $(q_{ob})_j$。

（2）然后利用第十章及本章前几节的方法求解卫星受摄运动方程，算出 t_j 时刻的轨道根数 E_j，从而可利用（10-33）及（10-34）式计算此时刻卫星的受摄地心直角坐标（x_j，y_j，z_j）和速度（$\dot{x}_j$，$\dot{y}_j$，$\dot{z}_j$）。

（3）设测站 p 的参心地固直角坐标已知为（X_p，Y_p，Z_p），利用格林尼治恒星时及地球自转角速度可将它化为天球坐标系（以春分点为 x 轴方向）内的坐标（x_p，y_p，z_p）及速度（$\dot{x}_p$，$\dot{y}_p$，$\dot{z}_p = 0$）。这里未考虑参心与地心的不一致以及两坐标系轴的不平行。

（4）于是可由卫星受摄坐标与测站地心坐标，求出卫星的站心坐标及站心速度为

$$\left.\begin{aligned} x' &= x - x_p & \dot{x}' &= \dot{x} - \dot{x}_p \\ y' &= y - y_p & \dot{y}' &= \dot{y} - \dot{y}_p \\ z' &= z - z_p & \dot{z}' &= \dot{z} \end{aligned}\right\} \tag{11-36}$$

这就求得了相应于 t_j 时刻的 $(q_{ca})_j$，从而可组成自由项 $(q_{ob})_j - (q_{ca})_j$。

2．计算 $\dfrac{\partial q}{\partial E}$

顾及（11-33）～（11-35）式以及有 6 个根数，（10-32）式的第一项应为

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{\partial q_j}{\partial E_k}\left(1 + \frac{\partial(\delta E_j)}{\partial E_{0k}}\right) dE_{0k} \tag{11-37}$$

下标 j 表示观测时刻 t_j，下标 k 表示 6 个根数中的一个，下标 0 表示初始时刻。

现在我们省去下标 k、j，讨论 $\dfrac{\partial q}{\partial E}$ 的计算方法。按（11-36）式使用的符号，可将 $\dfrac{\partial q}{\partial E}$ 表示为

$$\frac{\partial q}{\partial E} = \frac{\partial q}{\partial x'}\,\frac{\partial x'}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial E} + \frac{\partial q}{\partial y'}\,\frac{\partial y'}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial E} + \frac{\partial q}{\partial z'}\,\frac{\partial z'}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial E} \tag{11-38}$$

（1）上式中三项的第一个因子的计算。如果 q 用卫星站心坐标 r'、α'、δ' 或 $r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}$ 表示，则可直接微分求得：

（2）三项中的第二个因子，根据（11-36）式，应等于1，即

$$\frac{\partial x'}{\partial x}=\frac{\partial y'}{\partial y}=\frac{\partial z'}{\partial z}=1 \tag{11-39}$$

（3）三项中的第三个因子的计算，可由（10-33）式对各相应应轨道根数E微分求得。

3．计算$\frac{\partial q}{\partial \rho}$

由于ρ是测站地固坐标X_r、Y_r、Z_r的函数，所以（11-32）式的右边第二项可写为

$$\frac{\partial q_j}{\partial X_r}dX_r+\frac{\partial q_j}{\partial Y_r}dY_r+\frac{\partial q_j}{\partial Z_r}dZ_r \tag{11-40}$$

又由于将地固坐标化到天球坐标系中是利用下式

$$\begin{pmatrix} x_r \\ y_r \\ z_r \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos S & -\sin S & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_r \\ Y_r \\ Z_r \end{pmatrix} \tag{11-41}$$

式中S是格林尼治恒星时。所以x_r、y_r、z_r中每一个又都是地固坐标X_r、Y_r、Z_r的函数，如果用$\partial\rho_r$表示∂X_r或∂Y_r或∂Z_r，并省去q_j的下标j，则可将$\frac{\partial q}{\partial \rho_r}$表示为

$$\frac{\partial q}{\partial \rho_r}=\frac{\partial q}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial \rho_r}+\frac{\partial q}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial y_r}\frac{\partial y_r}{\partial \rho_r}+\frac{\partial q}{\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial z_r}\frac{\partial z_r}{\partial \rho_r} \tag{11-42}$$

其中每一项的第一个因子的计算已在前面讨论过，第二个因子的计算根据（11-36）式应为

$$\frac{\partial x'}{\partial x_r}=\frac{\partial y'}{\partial y_r}=\frac{\partial z'}{\partial z_r}=-1 \tag{11-43}$$

第三个因子中含有九个偏导数，其中

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial z_r}{\partial X_r}=\frac{\partial z_r}{\partial Y_r}=0，\frac{\partial z_r}{\partial Z_r}=1 \\ &\frac{\partial x_r}{\partial Z_r}=\frac{\partial y_r}{\partial Z_r}=0 \end{aligned}\right\} \tag{11-44}$$

其余四个，即

$$\frac{\partial x_r}{\partial X_r}，\frac{\partial x_r}{\partial Y_r}，\frac{\partial y_r}{\partial X_r}，\frac{\partial y_r}{\partial Y_r}$$

可由（11-41）式求得。

4．计算$\frac{\partial q}{\partial \sigma}$

如前所述，摄动因素有许多，若为简单起见只考虑地球引力位的摄动。即使如此，按照§10.4.1的分析，摄动展开式中也将包含一阶项、二阶项、混合项等等。如果将$\frac{\partial q}{\partial \sigma}$表示为

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma}=\frac{\partial q}{\partial E}\frac{\partial E}{\partial \sigma} \tag{11-45}$$

上式右边第一个因子的计算已在前面讨论过。为了表示第二个因子，先将受摄轨道根数E按§10.4.1中（10-201）式的办法展开为

$$E=E_0+J_2\cdot\delta E_{J_2}^{(1)}+\sum_{n,k}\sigma_{n,k}\cdot\delta E_{\sigma_{n,k}}^{(1)}+J_2^2\cdot\delta E_{J_2}^{(2)}+\cdots \tag{11-46}$$

上式中的$\sigma_{n,k}$是位系数，提到求和号前项的$J_2=\sigma_{2,0}$。因此，求和号内的（n，k）从（2，1）开始。上标（1）、（2）表示一阶项、二阶项。

对（11-46）式求偏导数，便得

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma}=\delta E_{J_2}^{(1)}+\sum_{n,k}\delta E_{\sigma_{n,k}}^{(1)}+\cdots \tag{11-47}$$

若继续写下去，会出现$2J_2\cdot\delta E_{J_2}^{(2)}$形式的项，它的量级更小，是前面项的$10^{-3}$，而$J_2$本身已是$10^{-3}$量级的量，当积分的时间区间不长时可以舍去。当然，项数的取舍应以所需精度的要求而定。

5. 计算$\frac{\partial E}{\partial E_0}$

由（11-33）～（11-35）式可知，这是计算初始轨道根数在（$t-t_0$）这段时间的变化$\frac{\partial(\delta E)}{\partial E_0}$。这个导数的量级约为$10^{-3}$，严密计算它的公式比较繁锁，要包含根数在此期间的长期变化以及长、短周期变化等项，一般可用近似计算公式：

$$\frac{\partial(\delta E)}{\partial E_0}=\sigma\int_{t_0}^{t}\begin{pmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}dt \tag{11-48}$$

其中，

$$\sigma=10^{-3} \tag{11-49}$$

$$J_{11}=\begin{pmatrix}\frac{\partial\dot{a}}{\partial a} & \frac{\partial\dot{a}}{\partial e} & \frac{\partial\dot{a}}{\partial i}\\ \frac{\partial\dot{e}}{\partial a} & \frac{\partial\dot{e}}{\partial e} & \frac{\partial\dot{e}}{\partial i}\\ \frac{\partial\dot{i}}{\partial a} & \frac{\partial\dot{i}}{\partial e} & \frac{\partial\dot{i}}{\partial i}\end{pmatrix} \tag{11-50}$$

$$
J_{12}=\begin{bmatrix} \frac{\partial\dot{a}}{\partial M} & \frac{\partial\dot{a}}{\partial\Omega} & \frac{\partial\dot{a}}{\partial\omega} \\ \frac{\partial\dot{e}}{\partial M} & \frac{\partial\dot{e}}{\partial\Omega} & \frac{\partial\dot{e}}{\partial\omega} \\ \frac{\partial\dot{i}}{\partial M} & \frac{\partial\dot{i}}{\partial\Omega} & \frac{\partial\dot{i}}{\partial\omega} \end{bmatrix} \tag{11-51}
$$

$$
J_{21}=\begin{bmatrix} \frac{\partial\dot{M}_0}{\partial a} & \frac{\partial\dot{M}_0}{\partial e} & \frac{\partial\dot{M}_0}{\partial i} \\ \frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial a} & \frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial e} & \frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial i} \\ \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial a} & \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial e} & \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial i} \end{bmatrix} \tag{11-52}
$$

$$
J_{22}=\begin{bmatrix} \frac{\partial\dot{M}_0}{\partial M} & \frac{\partial\dot{M}_0}{\partial\Omega} & \frac{\partial\dot{M}_0}{\partial\omega} \\ \frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial M} & \frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial\Omega} & \frac{\partial\dot{\Omega}}{\partial\omega} \\ \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial M} & \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial\Omega} & \frac{\partial\dot{\omega}}{\partial\omega} \end{bmatrix} \tag{11-53}
$$

上面各矩阵的元素可利用拉格朗日方程(10-30)式计算。

到这里，(11-32)式的全部系数就都能计算了，接下去便是对于若干个t_j时刻，若干个测站的观测值和计算值列出改正数方程并平差求解。求解得到的卫星轨道根数的受摄变化，可用来研究确定地球引力位系数，计算卫星的受摄坐标，测站的地心坐标，以及解决其他动力学问题。

§11.3 利用卫星轨道摄动计算地球引力位动力系数

由第十章以及本章前几节可以看出，计算卫星轨道受摄变化量相当麻烦，即使计算一阶摄动也还需要作一些近似。不过从大地测量的应用来说，并不需要计算所有轨道根数的受摄变化，而且只要求获得与观测值精度相适应的结果，因此计算工作可以适当简化。有许多文献对轨道根数受摄变化的性质做过详尽的研究，现在归纳说明如下：

（1）地球引力位的带谐部分对全部六个轨道根数会引起短周期摄动，以及对除轨道半长轴a以外的五个根数会引起长周期摄动；

（2）角量根数Ω、ω、M中的长期摄动仅与偶阶带谐部分有关，与奇阶带谐部分无关；

（3）含经度因子的田（扇）谐部分对轨道根数只引起周期摄动（包括长、短周期及共振），而不引起长期摄动；

（4）不宜用平近点角M的摄动来研究地球引力位动力系数，因为其中含大气阻力影响较显著；

（5）在某些情况下，例如e或i很小，或者卫星绕地平均速率接近于地球自转速率，会产生较大的共振摄动。一阶共振摄动在除a以外的所有根数中都会出现。

综上所述，大地测量应用上主要关心的是卫轨交点和近地点的受摄变化，而且长期项和长周期项尤为重要。

11.3.1 与动力系数联系的交点和近地点受摄运动展开式

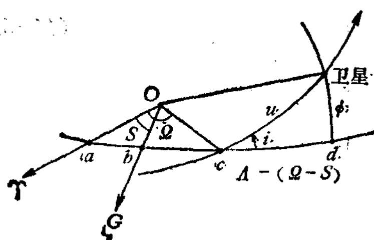


图 11-1

地球引力位动力系数在这里用$J_n^{(k)}$和$S_n^{(k)}$表示，n是阶，k是级。此外，其它一些量的关系如图11-1所示。

图中oa指向春分点方向，ob指向经度零点方向，oc是卫星轨道面与赤道面交线，c是轨道交点，d是通过卫星的经圈与赤道的交点。

ϕ表示此时卫星的赤纬，赤经$=ad$，$\Lambda=bd$是卫星的经度，也是相对于（格）子午圈的负时角，S表示（格）恒星时。其余符号按以前的定义。

由图可见，$-(cd)=(\Omega-S-\Lambda)$。

以下不加推导写出参考文献[35]给出的卫星轨道交点及近地点受摄变化的展开式。原式还将月日摄动合并在一起，这里省去了。

$$
\begin{aligned}
\frac{d\Omega}{dt}=&-\sqrt{GM}\frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{a(1-e^2)}}\sin(\Omega-S-\Lambda)\times\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_e^n}{r^{n+1}}\\
&\cdot J_n^{(0)}P_n^{(1)}(\sin\phi)-\sqrt{GM}\frac{\operatorname{cosec} i}{\sqrt{a(1-e^2)}}\sin(\Omega-S-\Lambda)\\
&\times\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{a_e^n}{r^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}(J_n^{(k)}\cos k\Lambda+S_n^{(k)}\sin k\Lambda)\right.\\
&\left.\times[-k\operatorname{tg}\phi\cdot P_n^{(k)}(\sin\phi)+\mu P_n^{(k+1)}\cdot(\sin\phi)]\right\}-\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{11-54}
$$

式中μ是指示符号，当$k=n$时，$\mu=0$；$k\leqslant n-1$时，$\mu=1$。r是卫星地心距，其余符号定义同前。

$$
\begin{aligned}
\frac{d\omega}{dt}=&\sqrt{GM}\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{a(1-e^2)}}\sin(\Omega-S-\Lambda)\times\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a_e^n}{r^{n+1}}J_n^{(0)}\cdot P_n^{(1)}(\sin\phi)\\
&+\sqrt{GM}\frac{\operatorname{ctg} i}{\sqrt{a(1-e^2)}}\sin(\Omega-S-\Lambda)\times\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\frac{a_e^n}{r^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}J_n^{(k)}\cos k\Lambda\right.\\
&+S_n^{(k)}\sin k\Lambda)\cdot[-k\operatorname{tg}\phi\cdot P_n^{(k)}(\sin\phi)\\
&\left.+\mu P_n^{(k+1)}(\sin\phi)]\right\}+\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{11-55}
$$

从分析摄动的长期项及周期项得知，短周期变化是真近点角v的周期函数，长周期变化是近升距ω的周期函数(相应项中不含v)，而长期项仅是i、a、e、Ω以及$J_n^{(k)}$、$S_n^{(k)}$的函数，不含ω和v。为了计算上两式中大地测量需要的长期和长周期摄动，要将与时间有关的量表示成时间显函数。为此先作如下变换：

$$\left.\begin{aligned}&\sin\phi=\sin(\omega+v)\sin i\\&\sin(\Omega-S-\Lambda)=-\frac{\sin(\omega+v)\cos i}{\cos\phi}\\&\cos(\Omega-S-\Lambda)=\frac{\cos(\omega+v)}{\cos\phi}\end{aligned}\right\}\tag{11-56}$$

$$r^{-n}=[a(1-e^2)]^{-n}(1+e\cos v)^n=[a(1-e^2)]^{-n}\left[1+\binom{n}{1}e\cos v+\binom{n}{2}e^2\cos^2 v+\cdots\cdots+e^n\cos^n v\right]\tag{11-57}$$

然后将$P_n^{(1)}(\sin\phi)$置换为具体展开式，将(11-56)、(11-57)式代入$\dot{\Omega}$，$\dot{\omega}$式，并将有关的任一轨道根数按下式置换：

$$\frac{dE}{dt}=\frac{dE}{dv}\,\frac{dv}{dt}\tag{11-58}$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{r^2}\sqrt{GM}\cdot\sqrt{a(1-e^2)}\tag{11-59}$$

经过冗长的推导，便可得$\frac{d\Omega}{dv}$及$\frac{d\omega}{dv}$与带谐动力系数有关的表示式，以及与田（扇）谐动力系数有关的表示式，然后再分离出长期项与长周期项，即表示为动力系数$J_n^{(k)}$、$S_n^{(k)}$的函数。如果有足够长时间的轨道根数受摄变化的观测资料，将长期和长周期项积分，便可确定不同n、k值的一组动力系数$J_n^{(k)}$、$S_n^{(k)}$。

要说明的是，确定带谐动力系数，特别是偶阶带谐系数，只要对交点及近地点的长期和长周期变化积分，以及对偏心率的长周期变化积分，就能取得良好的结果。但是确定田（扇）谐动力系数时，一天之内的短周期变化$\left(\text{周期约为}\frac{24^h}{k}\right)$极为重要，同时还必需计算测站坐标，因为测站坐标的误差会引起同样性质的周期性变化。因此，与确定带谐动力系数有所不同的是，确定田（扇）谐动力系数是从卫星位置的关系式出发，而不是从受摄变化的振幅出发，这就要求能有足够数量的卫星观测站适当分布在地面上。

11.3.2 地球引力位动力系数的数字结果

下面将参考文献[35]引用的动力系数列于表 11-3 以供参考。表中的田（扇）谐动力系数是规格化了的系数，即

$$\left.\begin{aligned}\overline{J}_n^{(k)} &= \frac{1}{N_n^{(k)}} J_n^{(k)} \\ \overline{S}_n^{(k)} &= \frac{1}{N_n^{(k)}} S_n^{(k)}\end{aligned}\right\} \tag{11-60}$$

其中范数

$$N_n^{(k)} = \sqrt{\frac{(2-\delta k)(2n+1)(n-k)!}{(n+k)!}} \tag{11-61}$$

上式中的 δ 为克罗内克符号，即

当 $$k \begin{matrix} =0 \\ \neq 0 \end{matrix} \text{时，} \quad \delta = \begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix} \tag{11-62}$$

其范数的倒数也已逐一算出，列于表 11-2 中。

表 11-2

n	$k=0$	$k=1$	$k=2$
0	1.0000000000		
1	0.5773502693	0.577350269	
2	0.4472135956	0.774596669	1.549193338
3	0.3779644731	0.925820100	2.927700219
4	0.3333333334	1.054092554	4.472135955
5	0.3015113446	1.167748416	6.179143805
6	0.2773500982	1.270977818	8.038369525
7	0.2581988898	1.366260102	10.03992032
8	0.2425356251	1.455213750	12.17519175
9	0.2294157340*	1.538967528	14.43679510
10	0.2182178903	1.618347188	16.81835732
n	$k=3$	$k=4$	$k=5$
3	7.171371655		
4	16.73320053	47.32863826	
5	30.27149874	128.4310922	406.1347738
6	48.23021715	264.1677788	1239.056713
7	70.99295740	470.9140049	2825.484030
8	98.91172535	766.1669300	5524.908305
9	132.31541265	1168.578084	9777.025700
10	171.51426430	1697.904591	16107.73727
n	$k=6$	$k=7$	$k=8$
6	4292.218362		
7	14407.19820	53906.79955	
8	35805.49810	196114.7899	784459.1595
9	75732.51545	524690.2580	3059443.654
10	144071.9820	1188047.999	8730334.366
n	$k=9$	$k=10$	
9	12980120.13		
10	53817394.15	240678703.4	

表 11-3

n	k	$\overline{J}_n^{(k)}\cdot 10^6$	$\overline{S}_n^{(k)}\cdot 10^6$
2	2	2.38	−1.35
3	1	1.71	0.23
	2	0.84	−0.51
	3	0.66	1.43
4	1	−0.47	−0.39
	2	0.35	0.48
	3	0.92	−0.24
	4	0.04	0.30
5	1	−0.06	−0.05
	2	0.53	−0.21
	3	−0.40	0.07
	4	−0.20	0.02
	5	0.18	−0.56
6	1	−0.08	0.01
	2	0.01	−0.27
	3	−0.04	0.03
	4	−0.08	−0.48
	5	−0.26	−0.46
	6	−0.02	−0.16
7	1	0.17	0.11
	2	0.32	0.16
	3	0.18	0.00
	4	−0.16	−0.04
	5	0.07	−0.01
	6	−0.23	0.10
	7	0.07	0.06
8	1	−0.01	−0.01
	2	0.04	0.04
	3	−0.03	0.00
	4	−0.17	−0.02
	5	−0.09	0.09
	6	−0.01	0.30
	7	0.02	0.04
	8	−0.18	0.03
9	1	0.11	0.00
	2	0.03	0.05
	3	−0.03	−0.01
	4	0.07	0.02
	5	−0.04	0.04
	6	0.04	0.01
	7	0.04	−0.02
	8	0.13	0.00
	9	0.08	0.04
10	1	0.10	−0.07
	2	−0.08	−0.06
	3	−0.08	−0.05
	4	−0.06	−0.08
	5	0.02	−0.02
	6	−0.04	−0.01
	7	0.04	−0.05
	8	0.04	−0.05
	9	0.05	−0.04
	10	0.03	−0.02
11	1	−0.03	0.02
	2	0.05	−0.05
	3	0.01	−0.08
	4	−0.03	0.00
	5	0.03	0.02
	6	−0.03	−0.02
	7	0.03	−0.03
	8	0.04	−0.02
	9	0.03	0.01
	10	−0.03	−0.01
	11	0.10	0.06
12	1	−0.09	−0.07
	2	−0.06	0.02
	3	0.03	0.02
	4	−0.05	0.01
	5	0.02	0.01
	6	−0.01	0.01
	7	−0.04	−0.02
	8	0.00	0.01
	9	−0.01	0.02
	10	−0.01	0.00
	11	−0.05	−0.02
	12	−0.01	−0.01
13	1	0.00	0.04
	2	−0.03	0.01
	3	0.00	0.03
	4	−0.01	−0.02
	5	0.03	−0.02
	6	−0.03	0.05
	7	−0.02	0.00
	8	−0.02	−0.01
	9	0.02	0.05
	10	0.04	−0.02
	11	−0.02	0.01
	12	−0.02	0.06
	13	−0.07	0.00

续表 11-3

n	k	$\bar{J}_n^{(k)}\cdot10^6$	$\bar{S}_n^{(k)}\cdot10^6$	n	k	$\bar{J}_n^{(k)}\cdot10^6$	$\bar{S}_n^{(k)}\cdot10^6$
14	1	−0.01	0.02	15	1	0.01	−0.01
	2	−0.01	−0.04		2	−0.02	−0.03
	3	0.06	−0.03		3	0.02	0.03
	4	0.00	0.00		4	0.00	0.01
	5	0.05	−0.03		5	0.03	−0.02
	6	0.01	−0.03		6	0.03	−0.05
	7	0.03	0.02		7	0.03	0.04
	8	−0.03	−0.03		8	−0.06	0.00
	9	0.03	0.07		9	0.00	0.04
	10	0.04	0.01		10	0.02	0.01
	11	0.04	0.01		11	0.01	0.01
	12	0.05	−0.03		12	−0.07	0.05
	13	0.01	0.04		13	−0.05	−0.03
	14	−0.04	0.02		14	0.01	−0.03
					15	−0.02	−0.01

$J_2^{(0)}=-1082.69\cdot10^{-6}$	$J_3^{(0)}=2.565\cdot10^{-6}$	$J_4^{(0)}=1.608\cdot10^{-6}$	$J_5^{(0)}=0.174\cdot10^{-6}$
$J_6^{(0)}=-0.542$	$J_7^{(0)}=0.419$	$J_8^{(0)}=0.128$	$J_9^{(0)}=0.022$
$J_{10}^{(0)}=0.338$	$J_{11}^{(0)}=-0.176$	$J_{12}^{(0)}=-0.053$	$J_{13}^{(0)}=0.146$
$J_{14}^{(0)}=0.174$	$J_{15}^{(0)}=0.065$	$J_{16}^{(0)}=-0.449$	$J_{17}^{(0)}=0.052$
$J_{18}^{(0)}=0.324$	$J_{19}^{(0)}=0.075$	$J_{20}^{(0)}=-0.334$	

§11.4 大地水准面引力位及引力比例系数的计算

如果有了足够精确的动力系数，就能用于解决许多大地测量动力学问题。首先可以计算调整后大地水准面的引力位W_0以及引力比例系数 $R_0=\dfrac{GM}{W_0}$。这里说的调整后大地水准面是指这样一个曲面，它的位值 $W=W_0$，在海洋上此曲面与某种定义的大地水准面重合，在有陆地的范围内，则是将大地水准面外部质量归算到内部，保持位值不变而稍有变形的曲面。

由于重力位等于引力位加离心位，设大地水准面上流动点M_i的坐标为

$$\left.\begin{aligned} x_i&=\rho_i\cos\phi_i\cos\Lambda_i\\ y_i&=\rho_i\cos\phi_i\sin\Lambda_i\\ z_i&=\rho_i\sin\phi_i \end{aligned}\right\} \tag{11-63}$$

式中 ρ、ϕ、Λ 分别是地心距，地心纬度和经度。则 M_i点的重力位 W_0应为

$$W_0=\frac{GM}{\rho_i}\left\{1+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{a_e}{\rho_i}\right)^n\times\sum_{k=0}^{n}\left(J_n^{(k)}\cos k\Lambda_i+S_n^{(k)}\sin k\Lambda_i\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\times P_n^{(k)}(\sin\phi_i)\right]\right\}+\frac{1}{2}\omega^2\rho_i^2\cos^2\phi_i \tag{11-64}$$

式中用到的 GM、ω 的数值可采用精度很高的已知值，M_i点的精确地心坐标值不易获得，只能用分布在地面上的一些卫星站的地心坐标，并需作某些近似。

设如图 11-2 所示，令地面测站点$\overline{M}_i$的地心距为$\overline{\rho_i}=\rho_i+\Delta\rho_i$，则

$$\left.\begin{aligned}\overline{\rho}_i&=(\overline{x}_i^2+\overline{y}_i^2+\overline{z}_i^2)^{\frac{1}{2}}\\ \overline{\phi}_i&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\overline{z}_i^2}{(\overline{x}_i^2+\overline{y}_i^2)^{\frac{1}{2}}}\\ \overline{A}_i&=\mathrm{tg}^{-1}\frac{\overline{y}_i}{\overline{x}_i}\end{aligned}\right\}\tag{11-65}$$

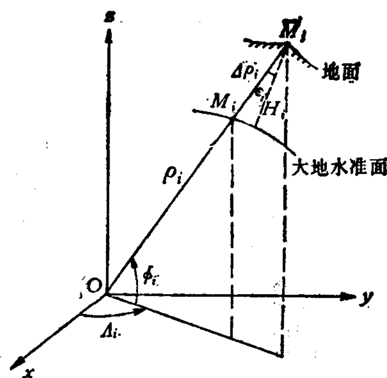


图 11-2

由于取ρ_i的方向与$\overline{\rho}_i$的方向一致，故

$$\phi_i=\overline{\phi}_i \quad A_i=\overline{A}_i \tag{11-66}$$

若令H_i为地面测站点$\overline{M}_i$的海水面以上高度，ε_i为M_i点垂线与ρ_i方向的夹角，则

$$\Delta\rho_i\approx H_i\sec\varepsilon_i\approx H_i \tag{11-67}$$

这样，如果能有足够多的地面测站点，并已知其地心坐标，再有足够多的动力系数，便可根据(11-64)式对应于每一地面测站点算出大地水准面位值W_0。

参考文献[35]利用了全球地面分布的 15 个卫星观测站的已知地心坐标，见表 11-4 及 11-5，这些测站点的坐标属于史密松天文台(SAO)定义的C_7坐标系，估计误差为±15m。

算出的各站W_0值及平均值列于表 11-6 中。

表 11-4

卫 星 站	$\overline{\rho}$(m)	$\overline{\Phi}=\Phi$	$\overline{A}=A$	H(m)	ρ(m)
9001	6 373 652	+32° 11′ 58.72″	253° 26′ 48.30″	1651	6 372 001
9002	6 375 643	−25 48 33.67	28 14 51.47	1544	6 374 099
9003	6 372 640	−30 55 52.37	136 47 01.94	162	6 372 478
9004	6 370 696	+36 16 45.12	353 47 36.55	26	6 370 670
9005	6 371 005	+35 29 27.38	139 32 16.39	60	6 370 945
9006	6 374 900	+29 11 43.56	79 27 27.05	1927	6 372 973
9007	6 378 926	−16 21 42.65	288 30 24.02	2451	6 376 475
9008	6 374 518	+29 28 19.28	52 31 11.18	1596	6 372 922
9009	6 377 187	+12 00 42.04	291 09 43.96	7	6 377 180
9010	6 373 731	+26 51 51.60	279 53 12.95	15	6 373 716
9011	6 372 838	−31 46 15.35	294 53 36.10	598	6 372 241
9012	6 378 526	+20 34 48.77	203 44 33.22	3034	6 375 492
9114	6 364 611	+54 33 40.30	249 57 22.79	708	6 363 903
9115	6 362 652	+60 02 40.55	10 45 02.27	576	6 362 076
9117	6 376 395	+16 38 17.17	190 29 09.10	5	6 376 390

为了计算引力比例系数R_0，可由(11-64)式得出

$$R_0=\rho_i\left\{1+\sum_{n=2}^{\infty}\left[\left(\frac{a_e}{\rho_i}\right)^n\sum_{k=0}^{n}(J_n^{(k)}\cos kA_i+S_n^{(k)}\sin kA_i)P_n^{(k)}\sin\phi_i)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{1}{3}q\left(\frac{a_e}{\rho_i}\right)^{-3}\cdot[1-P_2^{(0)}(\sin\phi_i)]\right\}^{-1} \tag{11-68}$$

表 11-5

卫星站	$\bar{x}$(m)	$\bar{y}$(m)	$\bar{z}$(m)
9001	−1 535 758	−5 166 993	3 401 040
9002	5 056 124	2 716 484	−2 775 815
9003	−3 983 748	3 743 099	−3 275 592
9004	5 105 591	− 555 232	3 769 672
9005	−3 946 695	3 366 285	3 698 841
9006	1 018 205	5 471 098	3 109 613
9007	1 942 768	−5 804 075	−1 796 960
9008	3 376 881	4 403 983	3 136 253
9009	2 251 819	−5 816 912	1 327 163
9010	976 282	−5 601 387	2 880 241
9011	2 280 574	−4 914 567	−3 355 456
9012	−5 466 053	−2 404 274	2 242 169
9114	−1 264 838	−3 466 890	5 185 473
9115	3 121 274	592 628	5 512 693
9117	−6 007 402	−1 111 873	1 825 725

表 11-6

卫星站	$W_0(10^2\mathrm{m^2s^{-2}})$	$v_{W_0}(10^2\mathrm{m^2s^{-2}})$	R_0(m)	v_{R_0}(m)	$\frac{v_{R_0}}{R_0}(10^{-6})$
9001	62 637.26	3.1	6 363 673	− 2.3	−0.36
9002	12	−10.9	687	11.7	1.84
9003	19	− 3.9	679	3.7	0.58
9004	32	9.1	667	− 8.3	−1.30
9005	14	− 8.9	684	8.7	1.37
9006	31	8.1	667	− 8.3	−1.30
9007	10	−12.9	688	12.7	2.00
9008	31	8.1	667	− 8.3	−1.30
9009	30	7.1	668	− 7.3	−1.15
9010	29	6.1	669	− 6.3	−0.99
9012	22	− 0.9	676	0.7	0.11
9114	23	0.1	675	− 0.3	−0.05
9117	19	− 3.9	679	3.7	0.58
平均	62 637.229		6 363 675.3		

式中

$$q=\frac{\omega^2 a_e^3}{GM} \tag{11-69}$$

对应于各测站的计算结果也列于表 11-6 中。

由上述计算过程可以看出，如果地面测站上已知的不是地心坐标，而是相对于某个参考椭球的大地坐标，以及相对于此椭球面的相对大地水准面高度，显然只要能知道此参椭球中心对地心的平移参数，也能求出地面测站的地心坐标，从而按上述方法计算 W_0，R_0。

§ 11.5 大地水准面地心矢径的展开式

如果由(11-68)式求出 R_0，便可利用(11-64)式求地心矢径 ρ，显然 ρ 也可表示为球

谐展开式，并且是坐标 ϕ、Λ 的函数。如果展开式取有限阶，$n=N$，并将它改为如下形式：

$$\rho = A_0^{(0)} + \sum_{n=2}^{N} \sum_{k=0}^{n} (A_n^{(k)} \cos k\Lambda + B_n^{(k)} \sin k\Lambda) \cdot P_n^{(k)} (\sin \phi) \tag{11-70}$$

其中系数 $A_n^{(k)}$、$B_n^{(k)}$ 是 $J_n^{(k)}$、$S_n^{(k)}$、q、R_0的函数。

如果在 $n>2$或$n=2$，$k=2$ 时略去含$(J_2^{(0)})^3 \approx 10^{-9}$，$(J_2^{(0)})^2 \cdot q \approx 3\times10^{-9}$，$\overline{J_n^{(k)}} \cdot J_2^{(0)} < 3\times10^{-9}$，$\overline{S_n^{(k)}} \times J_2^{(0)} < 3\times10^{-9}$，$\overline{J_n^{(k)}} \cdot q < 10^{-8}$，$\overline{S_n^{(k)}} \cdot q < 10^{-8}$等项，但保留含 $q^3 \approx 4\cdot10^{-8}$，及 $J_2^{(0)} \cdot q^2 \approx 10^{-8}$的项，则可得

$$\begin{aligned}
\rho = R_0 \Big\{ & 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-3} \cdot q[1 - P_2^{(0)}(\sin\phi)] + \frac{1}{3}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-6} \cdot q^2 \\
& \cdot [1 - P_2^{(0)}(\sin\phi)]^2 + \left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-1} \cdot J_2^{(0)} \cdot q \cdot P_2^{(0)}(\sin\phi) \\
& \times [1 - P_2^{(0)}(\sin\phi)] + \frac{4}{9}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-9} \cdot q^3 \times [1 - P_2^{(0)}(\sin\phi)]^3 \\
& + \frac{2}{3}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-4} \cdot J_2^{(0)} \cdot q^2 \times P_2^{(0)}(\sin\phi) \cdot [1 - P_2^{(0)}(\sin\phi)]^2 \Big\} \\
& + R_0 \sum_{n=2}^{N} \Big[\Big\{ 1 - \frac{1}{3} n \left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-3} \cdot q \times [1 - P_2^{(0)}(\sin\phi)] \\
& - n \left(\frac{a_e}{R_0}\right)^2 J_2^{(0)} \cdot P_2^{(0)}(\sin\phi) \Big\} \times \left(\frac{a_e}{R_0}\right)^n \cdot \sum_{k=0}^{n} (J_n^{(k)} \cos k\Lambda \\
& + S_n^{(k)} \sin k\Lambda) \times P_n^{(k)}(\sin\phi) \Big]
\end{aligned} \tag{11-71}$$

再根据勒让德多项式导出球函数与三角函数的关系式，对上式中的关项进行置换，可以导出(11-70)式中的系数表示式为

$$\begin{aligned}
A_0^{(0)} = R_0 \Big[& 1 + \frac{1}{3}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-3} \cdot q + \frac{2}{5}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-6} \cdot q^2 - \frac{1}{15}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-1} \\
& \cdot J_2^{(0)} \cdot q - \frac{2}{5}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^4 \times (J_2^{(0)})^2 + \frac{24}{35}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-9} \cdot q^3 \\
& - \frac{8}{35}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-4} \cdot J_2^{(0)} \cdot q^2 \Big]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_0^{(0)} = R_0 \Big[& \left(\frac{a_e}{R_0}\right)^2 \cdot J_2^{(0)} - \frac{1}{3}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-3} \cdot q - \frac{4}{7}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-6} \cdot q^2 \\
& + \frac{5}{21}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-1} \cdot J_2^{(0)} \cdot q - \frac{4}{7}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^4 (J_2^{(0)})^2 \\
& - \frac{8}{7}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-9} \cdot q^3 + \frac{4}{7}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-4} \cdot J_2^{(0)} \cdot q^2 \Big]
\end{aligned}$$

$A_2^{(1)} = 0$

$B_2^{(1)} = 0$

$$A_2^{(2)} = R_0\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^2 \cdot J_2^{(2)}$$

$$B_2^{(2)} = R_0\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^2 \cdot S_2^{(2)}$$

$$A_4^{(0)} = R_0\left[\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^4 \cdot J_4^{(0)} + \frac{6}{35}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-6} \cdot q^2 - \frac{6}{35}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-1}\right.$$

$$\cdot J_2^{(0)} \cdot q - \frac{36}{35}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^4 \times (J_2^{(0)})^2 + \frac{216}{385}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-9} \cdot q^3$$

$$\left. - \frac{192}{385}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-4} \cdot J_2^{(0)} \cdot q^2\right]$$

$$A_6^{(0)} = R_0\left[\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^6 \cdot J_6^{(0)} - \frac{8}{77}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-9} \cdot q_3\right.$$

$$\left. + \frac{12}{77}\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^{-4} \cdot J_2^{(0)} \cdot q^2\right]$$

$$A_n^{(0)} = R_0\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^n \cdot J_n^{(0)} \qquad (n = 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 9,\ \cdots,\ N)$$

$$\begin{matrix} A_n^{(k)} \\ B_n^{(k)} \end{matrix} = R_0\left(\frac{a_e}{R_0}\right)^n \cdot \begin{matrix} J_n^{(k)} \\ S_n^{(k)} \end{matrix}, \tag{11-72}$$

$$(n = 3,\ 4,\ 5,\ \cdots,\ N;\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

参考文献［35］对带谐系数取到 $N = 20$，田扇谐系数取到 $N = 15$，用表 11-3 所列 $J_n^{(k)}$、$S_n^{(k)}$ 的数值，计算了(11-72)式中的各系数，现列于表 11-7，表中的 $\overline{A}_n^{(k)}$、$\overline{B}_n^{(k)}$ 的前述情况一样，是经规格化了的值。

有了这些系数值，就可按（11-70）式计算大地水准面地心矢径，这里仍是指调整后大地水准面。关于展开式的收敛性已有证明。

用本节列出的公式及系数，还可以计算调整后大地水准面以外的任一水准面的地心矢径，这时

$$R_i = \frac{GM}{W_i} \tag{11-73}$$

式中 W_i 是第 i 个水准面的位值。在可以不计离心力的情况下，计算空间水准面应取 $q = 0$。

此外，还可证明，当 $n \neq 0$ 时，大地水准面矢径的积分均值 $\overline{\rho}$ 为

$$\overline{\rho} = A_0^{(0)} \tag{11-74}$$

表 11-7（单位：m）

n	$A_n^{(0)}$
0	6370996.67
2	−14266.76
3	16.44
4	19.74
5	1.12
6	−3.53
7	2.71
8	0.83
9	0.14
10	2.20
11	−1.15
12	−0.35
13	0.96
14	1.14
15	0.43
16	−2.96
17	0.34
18	2.15
19	0.50
20	−2.22

n	k	$\overline{A}_n^{(k)}$	$\overline{B}_n^{(k)}$
2	2	15.22	−8.63
3	1	10.96	1.47
	2	5.38	−3.27
	3	4.23	9.16
4	1	−3.02	−2.50
	2	2.25	3.08
	3	5.91	−1.54
	4	0.26	1.93
5	1	−0.39	−0.32
	2	3.41	−1.35
	3	−2.57	0.45
	4	−1.29	0.13
	5	1.16	−3.60
6	1	−0.52	0.06
	2	0.06	−1.74
	3	−0.26	0.19
	4	−0.52	−3.10
	5	−1.68	−2.97
	6	−0.13	−1.03
7	1	1.10	0.71
	2	2.07	1.03
	3	1.16	0.00
	4	−1.03	−0.26
	5	0.45	−0.06
	6	−1.49	0.65
	7	0.45	0.39
8	1	−0.06	−0.06
	2	0.26	0.26
	3	−0.19	0.00
	4	−1.10	−0.13
	5	−0.58	0.58
	6	−0.06	1.94
	7	0.13	0.26
	8	−1.17	0.19
9	1	0.71	0.00
	2	0.19	0.32
	3	−0.19	−0.06
	4	0.45	0.13
	5	−0.26	0.26
	6	0.26	0.06
	7	0.26	−0.13
	8	0.84	0.00
	9	0.52	0.26
10	1	0.65	−0.46
	2	−0.52	−0.39
	3	−0.52	−0.33
	4	−0.39	−0.52
	5	0.13	−0.13
	6	−0.26	−0.07
	7	−0.26	−0.33
	8	−0.26	−0.33
	9	0.33	−0.26
	10	0.20	−0.13
11	1	−0.20	0.13
	2	0.33	−0.33
	3	−0.07	0.52
	4	−0.20	0.00
	5	0.20	0.13
	6	−0.20	−0.13
	7	0.20	−0.20
	8	0.26	−0.13
	9	0.20	0.07
	10	−0.20	−0.07
	11	0.65	0.39
12	1	−0.59	−0.46
	2	−0.39	0.13
	3	0.20	0.13
	4	−0.33	0.07
	5	0.13	0.07
	6	−0.07	0.07
	7	−0.26	−0.13
	8	0.00	0.07
	9	−0.07	0.13
	10	−0.07	0.00
	11	−0.33	−0.13
	12	−0.07	−0.07
13	1	0.00	0.26
	2	−0.20	0.07
	3	0.00	0.20
	4	−0.07	−0.13
	5	0.20	−0.13
	6	−0.20	0.33
	7	0.13	0.00
	8	0.13	−0.07
	9	0.13	−0.33
	10	0.26	−0.13
	11	−0.13	0.07
	12	−0.13	0.39
	13	−0.46	0.00
14	1	−0.07	0.13
	2	−0.07	−0.26
	3	0.39	−0.20
	4	0.00	0.00
	5	0.33	−0.20
	6	0.07	−0.20
	7	0.20	0.13
	8	−0.20	−0.20
	9	0.20	0.46
	10	0.26	0.07
	11	0.26	0.07
	12	0.33	−0.20
	13	0.07	0.26
	14	−0.26	0.13
15	1	0.07	−0.07
	2	−0.13	−0.20
	3	0.13	0.20
	4	0.00	0.07
	5	0.20	−0.13
	6	0.20	−0.38
	7	0.20	0.26
	8	−0.40	0.00
	9	0.00	0.26
	10	0.13	0.07
	11	0.07	0.07
	12	−0.46	0.33
	13	−0.33	−0.20
	14	0.07	−0.20
	15	−0.13	−0.07

§ 11.6 大地水准面高度的计算

在大地测量中，确定大地水准面形状都是用一个适当大小的椭球安置在地球体内，由大地水准面相对于这个椭球面的差距（或高度）来表示的。显然，大地水准面上某点的地心矢径 ρ 与椭球上相应点的地心矢径 ρ_e 之差，就可近似等于此点的大地水准面高度 ζ。如果顾及地心矢径方向与椭球面法线方向的微小夹角 ε 的影响，则

$$\zeta=(\rho-\rho_e)\cos\varepsilon \tag{11-75}$$

由于 $\varepsilon<0.3°$，$(\rho-\rho_e)<200\text{m}$，故若取 $\cos\varepsilon\approx1$，引起的误差小于 1cm。

现在先以三轴椭球为例，导出椭球面上点地心矢径 ρ_e 的展开式。

设三轴椭球方程为

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{a^2(1-e_1^2)}+\frac{z^2}{a^2(1-e^2)}=1 \tag{11-76}$$

式中 a 是赤道椭圆的长半轴，e_1 是赤道椭圆偏心率，e 是在 (x', z) 子午面内子午椭圆的偏心率。

由(11-76)式可得

$$\rho_e^2=a^2(1-e^2)(1-e_1^2)+e^2(x'^2+y'^2)+e_1^2(x'^2+z^2)-e^2e_1^2x'^2 \tag{11-77}$$

如果用 Λ_a 表示 (x', z) 子午面的经度，则有

$$x'=x\cos\Lambda_a+y\sin\Lambda_a$$

$$y'=y\cos\Lambda_a-x\sin\Lambda_a$$

$$(x')^2=[\rho_e\cos\phi\cos(\Lambda-\Lambda_a)]^2$$

$$(y')^2=[\rho_e\cos\phi\sin(\Lambda-\Lambda_a)]^2$$

$$(x')^2+(y')^2=x^2+y^2=(\rho_e\cos\phi)^2$$

$$z^2=(\rho_e\sin\phi)^2 \tag{11-78}$$

于是可得

$$\rho_e^2=a^2(1-e^2)(1-e_1^2)+e^2\rho_e^2\cos^2\phi+e_1^2\rho_e^2[\cos^2\phi\cos^2(\Lambda-\Lambda_a)+\sin^2\phi]-e^2e_1^2\rho_e^2\cos^2\phi\cos^2(\Lambda-\Lambda_a) \tag{11-79}$$

或写成

$$\rho_e=\frac{a\sqrt{1-e^2}\ \sqrt{1-e_1^2}}{[1-e^2\cos^2\phi-e_1^2\sin^2\phi-e_1^2(1-e^2)\cos^2\phi\cos^2(\Lambda-\Lambda_a)]^{\frac{1}{2}}} \tag{11-80}$$

将上式展为级数，保留至含 e^8、$e^6e_1^2$、$e^2e_1^4$ 的项，可得

$$\rho_e=a\sqrt{1-e^2}\ \sqrt{1-e_1^2}\Big[1+\frac{1}{2}e^2\cos^2\phi+\frac{1}{2}e_1^2\sin^2\phi$$

$$+\frac{1}{2}e_1^2(1-e^2)\cos^2\phi\times\cos^2(\Lambda-\Lambda_a)+\frac{3}{8}e^4\cos^4\phi$$

$$+\frac{3}{8}e_1^4\sin^4\phi+\frac{3}{8}e_1^4(1-2e^2)\cos^4\phi\times\cos^4(\Lambda-\Lambda_o)$$

$$+\frac{3}{4}e^2e_1^2\sin^2\phi\cos^2\phi+\frac{3}{4}e^2e_1^2(1-e^2)\cos^4\phi\cos^2(\Lambda-\Lambda_o)$$

$$+\frac{3}{4}e_1^4(1-e^2)\sin^2\phi\cos^2\phi\cos^2(\Lambda-\Lambda_o)+\frac{5}{16}e^6\cos^6\phi$$

$$+\frac{15}{16}e^4e_1^2\sin^2\phi\cos^4\phi+\frac{15}{16}e^4e_1^2(1-e^2)\cos^6\cos^2(\Lambda-\Lambda_o)$$

$$+\frac{15}{16}e^2e_1^4\sin^4\phi\cos^2\phi+\frac{15}{16}e^2e_1^4\cos^6\phi\cos^4(\Lambda-\Lambda_o)$$

$$+\frac{15}{8}e^2e_1^4\sin^2\phi\cos^4\phi\cos^2(\Lambda-\Lambda_o)+\frac{35}{128}e^8\cos^8\phi$$

$$+\frac{35}{32}e^6e_1^2\sin^2\phi\cos^6\phi+\frac{35}{32}e^6e_1^2\cos^8\phi\cos^2(\Lambda-\Lambda_o)\Big] \qquad (11\text{-}81)$$

如果再将$\cos^2(\Lambda-\Lambda_o)$、$\cos^4(\Lambda-\Lambda_o)$变为倍角公式，代入上式中，然后将相应于勒让德多项式的那些项变为相应的阶和级的勒让德式，便得下列形式：

$$\begin{aligned}\rho_e=\ &a_0^{(0)}+a_2^{(0)}\cdot P_2^{(0)}(\sin\phi)+(a_2^{(2)}\cos 2\Lambda+b_2^{(2)}\sin 2\Lambda)P_2^{(2)}(\sin\phi)\\&+a_4^{(0)}P_4^{(0)}(\sin\phi)+(a_4^{(2)}\cos 2\Lambda+b_4^{(2)}\sin 2\Lambda)P_4^{(2)}(\sin\phi)\\&+(a_4^{(4)}\,\mathrm{coc}\,4\Lambda+b_4^{(4)}\sin 4\Lambda)P_4^{(4)}(\sin\phi)+a_6^{(0)}P_6^{(0)}(\sin\phi)\\&+(a_6^{(2)}\cos 2\Lambda+b_6^{(2)}\sin 2\Lambda)P_6^{(2)}(\sin\phi)\\&+(a_6^{(4)}\cos 4\Lambda+b_6^{(4)}\sin 4\Lambda)P_6^{(4)}(\sin\phi)+a_8^{(0)}P_8^{(0)}(\sin\phi)\\&+(a_8^{(2)}\cos 2\Lambda+b_8^{(2)}\sin 2\Lambda)P_8^{(2)}(\sin\phi)\end{aligned} \qquad (11\text{-}82)$$

其中各系数的展开式如下：

$$\begin{aligned}a_0^{(0)}=\ &a\sqrt{1-e^2}\ \sqrt{1-e_1^2}\Big(1+\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{5}e^4+\frac{1}{3}e_1^2\\&+\frac{1}{7}e^6+\frac{2}{15}e^2e_1^2+\frac{1}{9}e^8+\frac{1}{5}e_1^4\\&+\frac{3}{35}e^4e_1^2+\frac{3}{35}e^2e_1^4+\frac{4}{63}e^6e_1^2\Big)\\=\ &a\Big(1-\frac{1}{6}e^2-\frac{11}{120}e^4-\frac{1}{6}e_1^2-\frac{103}{1680}e^6+\frac{1}{20}e^2e_1^2\\&-\frac{1823}{40320}e^8-\frac{11}{120}e_1^4+\frac{13}{560}e^4e_1^2+\frac{13}{560}e^2e_1^4+\frac{139}{10080}e^6e_1^2\Big)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{matrix}a_8^{(2)}\\b_8^{(2)}\end{matrix}\right\}=a\Big(-\frac{1}{5148}e^6e_1^2\Big)\begin{cases}\cos 2\Lambda_o\\\sin 2\Lambda_o\end{cases}$$

$$\begin{matrix} a_4^{(4)} \\ b_4^{(4)} \end{matrix} = a\left(\frac{1}{2240}e_1^4 - \frac{1}{9856}e^2e_1^4\right)\begin{matrix} \cos 4A_e \\ \sin 4A_e \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} a_6^{(4)} \\ b_6^{(4)} \end{matrix} = a\left(-\frac{1}{44352}e^2e_1^4\right)\begin{matrix} \cos 4A_e \\ \sin 4A_e \end{matrix} \tag{11-83}$$

这样，便可用表示大地水准面地心矢径 ρ 的（11-70）式和表示三轴椭球面地心矢径 ρ_e 的（11-82）式组成两者之差（$\rho-\rho_e$）的表示式，即

$$\rho-\rho_e=(A_0^{(0)}-a_0^{(0)})+\sum_{n=2}^{N}\{\sum_{k=0}^{n}[(A_n^{(k)}-a_n^{(k)})\cos kA + (B_n^{(k)}-b_n^{(k)})\sin kA]P_n^{(k)}(\sin\phi)\} \tag{11-84}$$

由于各系数均可算出，故可用上式计算相对大地水准面高度。这里所指的也是调整后大地水准面。

如果不是计算对于三轴椭球而是对于旋转椭球的大地水准面高度，问题更为简单，只要在以上各式中取 $e_1=0$，化简后代入(11-84)式计算即可。

如果采用的不是与地心重合的椭球，而是参考椭球，参心对地心的平移量为(Δx_0，Δy_0，Δz_0)，则对求出的大地水准面高度的影响为

$$\delta\zeta\approx\delta\rho\approx\frac{x}{\rho}\Delta x_0+\frac{y}{\rho}\Delta y_0+\frac{z}{\rho}\Delta z_0=(\cos\phi\cos A)\Delta x_0 + (\cos\phi\sin A)\Delta y_0+(\sin\phi)\Delta z_0 \tag{11-85}$$

捷克大地测量学家布尔沙按上述方法，用表 11-3 所列由 SAO 根据卫星观测资料计算的动力系数值，分别计算了对于三轴椭球($a=6378173$，$\alpha=1:298.25$，$\alpha_1=1:94000$，$A_e=14°$)和对于 1967 年国际旋转椭球($a=6378160$，$\alpha=1:298.247$)的大地水准面高度，其结果参见第一章图 1-4 和图 1-7。

§11.7 用卫星方法建立地心坐标系

建立地心坐标系实际上就是求定地心的位置，可以用重力方法也可用卫星方法，但都需要有大量地面观测资料，才能确定得足够准确。比较而言，要获得足够多的全球重力资料相当困难，需要很长时间才能积累起来，而且海洋重力资料还不可能象陆地重力资料那样精度高，因而据此求定地心坐标的精度就受到限制。而卫星方法则不同，卫星可以飞越全球陆地和海洋上空，每天可绕地 10 多圈，引力中心就是地球质心，因此只需要在地球表面布设为数不多的观测站，精确测定卫星轨道位置，短时期内就能获得大量资料，从而解算出各观测站的地心坐标，既快又相当准确，而且可以随着观测精度的提高，轨道理论的改进，重复多次解算。我们在表 11-5 中所列的那些观测站的地心坐标，曾说明是属于(SAO)的 C_7 系统，这个 C_7 就是指第 7 次解算求得的地心坐标系。

卫星动力测地的主要内容，概括地说，就是建立地心坐标系和推算地球引力位动力系数，而两者又总是结合在一起的。每次解算所用的卫星观测资料，采用的 GM等基本常数

以及球谐展开式取到的阶数，都可能不同。不过往往只是改进一小部分甚至少数几个常数值就称为一个新的系统，例如 C_5 和 C_6 就仅仅是改动了GM值所得的两个系统。

史密松天文台(SAO)的总计划是为了确定"标准地球参数"，内容包括测定一些地面观测站的地心坐标和推算一组动力系数。这是一个理论和实际相互验证不断精化的过程，已发表过标准地球模型Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ。每次解算时，几何法、动力法、综合法（即综合地面和空间各类资料）或分或合都做试验，以便总结孰优孰劣。整个过程是很复杂的。限于篇幅，本书不作详述。

为了能对求定地心坐标有一些具体概念，现简要说明如下：

设已知地面测站的局部大地坐标，在此测站上观测卫星，可求得卫星在站心大地坐标系中的坐标，加上测站的已知坐标，便可算出卫星在局部大地坐标系中的坐标 U'、V'、W'。设 O' 为局部大地坐标系的原点，它在地心大地坐标系中（原点是 O）的坐标（即平移参数）为 ΔU、ΔV、ΔW。假定这两个坐标系轴对应平行，则卫星在地心大地坐标系中的坐标为

$$\left.\begin{aligned} U &= U' + \Delta U \\ V &= V' + \Delta V \\ W &= W' + \Delta W \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}86)$$

再取一个地心天球坐标系 O—xyz，并设上述地心大地坐标系变换到此坐标系仅需顺向旋转格林尼治恒星时 S 角，即

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} \cos S & -\sin S & 0 \\ \sin S & \cos S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

如果用 x、y、z 表示卫星在天球坐标系中的坐标，则由(11-86)式经旋转变换后可表示为

$$\left.\begin{aligned} x &= U'\cos S - V'\sin S + (\Delta U\cos S - \Delta V\sin S) \\ y &= U'\sin S + V'\cos S + (\Delta U\sin S + \Delta V\cos S) \\ z &= W' + \Delta W \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}87)$$

另一方面，卫星的地心直角坐标又可用矢径 r 和轨道根数表示(参见§3.7)，即

$$\left.\begin{aligned} x &= r[\cos(\omega+\theta)\cos\Omega - \sin(\omega+\theta)\sin\Omega\cos i] \\ y &= r[\cos(\omega+\theta)\sin\Omega + \sin(\omega+\theta)\cos\Omega\cos i] \\ z &= r[\sin(\omega+\theta)\sin i] \end{aligned}\right\} \qquad (11\text{-}88)$$

将上式左边用方程（11-87）的对应式表示，右边各量用泰勒级数展开，只取一次项，可得

$$
\left.\begin{aligned}
U'\cos S-V'\sin S+(\Delta U\cos S-\Delta U\sin S)&=r'[\cos(\omega'+\theta')\cos\Omega'\\
&\quad-\sin(\omega'+\theta')\sin\Omega'\cos i']+\frac{\partial x}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial x}{\partial e}\Delta e\\
&\quad+\frac{\partial x}{\partial i}\Delta i+\frac{\partial x}{\partial\Omega}\Delta\Omega+\frac{\partial x}{\partial\omega}\Delta\omega+\frac{\partial x}{\partial\theta}\Delta\theta\\
U'\sin S+V'\cos S+(\Delta U\sin S+\Delta V\cos S)&=r'[\cos(\omega'+\theta')\sin\Omega'\\
&\quad+\sin(\omega'+\theta')\cos\Omega'\cos i']+\frac{\partial y}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial y}{\partial e}\Delta e\\
&\quad+\frac{\partial y}{\partial i}\Delta i+\frac{\partial y}{\partial\Omega}\Delta\Omega+\frac{\partial y}{\partial\omega}\Delta\omega+\frac{\partial y}{\partial\theta}\Delta\theta\\
W'+\Delta W&=r'[\sin(\omega'+\theta')\sin i']+\frac{\partial z}{\partial a}\Delta a+\frac{\partial z}{\partial e}\Delta e\\
&\quad+\frac{\partial z}{\partial i}\Delta i+\frac{\partial z}{\partial\Omega}\Delta\Omega+\frac{\partial z}{\partial\omega}\Delta\omega+\frac{\partial z}{\partial\theta}\Delta\theta
\end{aligned}\right\}\qquad(11\text{-}89)
$$

上式右边带有上标“′”的量表示近似值，可用§3.8中计算初轨的方法求得，必要时再作一定的精化。各根数偏微商的计算则较为复杂，可参阅第十章有关章节。上式左边的U'、V'、W'是根据观测值求得的，也可看作近似值。ΔU、ΔV、ΔW是我们求定地心位置的未知数。可以看出，这些量是和轨道根数改正值联合求解的。每有一组观测值就可列出一组这样的方程，当方程数多于未知数个数时，便可用最小二乘法求解。

显然，如果轨道根数精确已知，问题就简单多了。

参 考 文 献

〔1〕 方俊，固体潮，科学出版社，1984.

〔2〕 卢福康，多普勒观测短弧平差，测绘通报，1980年第1期.

〔3〕 卢福康，海军导航卫星系统的情况，测绘译丛，1984年第3期

〔4〕 赵进义，易照华，天体力学，上海科技出版社，1983.

〔5〕 叶叔华，中国VLBI和SLR网对于地球科学研究的意义，全国测绘行业科技发展战略论文选编，1987.

〔6〕 陈俊勇，卫星多普勒定位，测绘出版社，1982.

〔7〕 周忠谟，地面网与卫星网之间转换的数学模型，测绘出版社，1984.

〔8〕 管泽霖，宁津生，地球形状及外部重力场，测绘出版社，1981.

〔9〕 朱华统，大地座标系的建立，测绘出版社，1986.

〔10〕 张云福等译，军事大地测量与地球空间科学，解放军出版社，1985.

〔11〕 Vanicek, P.et al, "Global Positioning System Differential Positioning Simulations", Technical Report No.90, UNB Canada, 1983.

〔12〕 Senus, W.J., NAVSTAR Global Positioning System Status, Proceeding of the International Association of Geodesy(IAG Symposia), VoL.2, 1983.

〔13〕 Lambeck, K, The Earth's Variable Rotation,Geophysical Causes and Consegu-ences, Cambridge, 1980.

〔14〕 Rapp, R.H., Global anomaly and undulation recovery using GEOS-3 altimeter data, OSU.Rep.No.285, 1979.

〔15〕 Vanicek, P.Krakiwsky, E.J., Geodesy, The concepts.N-H-P-C, 1982.

〔16〕 King-Hele, D., Observing earth satellites, Macmillan/London, 1983.

〔17〕 Torge, W., Geodesy, W de G, 1980; 中译本，测绘出版社，1984.

〔18〕 Bomford, G., Geodesy(4th ed.), Clarendon press, Oxford, 1980.

〔19〕 Kaula, W.M., The changing shape of the earth, Nature, Vol.303, 1983.

〔20〕 Yoder, C.F.et al.Secular variation of earth's gravitational harmonic J coefficient from Lageos and nontidal acceleration of earth rotation, Nature, Vol.303, 1983.

〔21〕 Szidarovszky, F.et al.,Principles and Procedures of numericalanalysis,Plenum, 1978.

〔22〕 Groten, E., Geodesy and the earth's gravity field, Dummler/Bonn, 1979.

〔23〕 Groten, E., The motion of the earth, L/B New Series, Vol.2, Springer, 1983.

〔24〕 Thomas, A., The TRANSIT navigation satellite system, Magnavox, 1978.

〔25〕 Gürlean, O., Differential Relations Betxeen Earth fixed coordinate systems, IAG/IUGG Symposium, Vol.1, 1983.

〔26〕 Marussi, A., Intrinsic Geodesy, Springer, 1985.

〔27〕 Wells, D.E., Doppler satellite control, Tech.Rep.No.29, UNB, 1974; 中译本，测绘出版社，1979.

[28] Richter, B , The Long-Period tides in the tide spectrum, IAG/IUGG Symposium, Vol.1, 1983.

[29] Campbell, J., Relative positioning with VLBI, IAG/IUGG(IAG) Symposium, 1979.

[30] Vondrak, J., Long-period behaviour of polar motion between 1900.0 and 1984. 0.Annales Geoph, 1985, 3, 3.

[31] Tscherning, C.C., Estimation of the longitude bias of the NWL-9D coordinate system from deflections of the vertical satellite altimetry and hight degree spherical harmonic expansions, Bull.Geod.86-1, 1986.

[32] Дубошин, Г.Н., Небесная Механика, М.НАУКА, 1983.

[33] Плахов, Ю.В., Применение Теории возмущений в космической геодезии, М.НЕДРА, 1983.

[34] Егоров, Н.Н., Исследование численно-итеритивного метода интегрирования уравнений движения ИСЗ для решения задач космической геодезии, МИИГАиК, 1979.

[35] Bursa, M., Основы космичесой геодезии, М.НЕДРА, 1975.

[36] Пеллинек, Л.П., Высшая геодезия(Теоретическая Геодезия), М.НЕДРА,1978; 中译本，测绘出版社，1983.

[37] Большаков, В.Д., Теория математической обработки геодезических измерений, М.НЕДРА, 1977.

[38] Джакалья, Г.Е.О., Методы теории возмущений для нелинейных систем, М НАУКА, 1979.

[39] Плахов, Ю.В., Исследование по усовершенствованию методов теории возмущенного движения, применяемых для решения задач космической геодезии, МИИГАик, 1976.

[40] Аксенов, Е.П., Теория движения искусственных спутников, М.НАУКА, 1977.

[41] Дубошин, Г.Н., Справочное руководство по небесной механике и астродинамике, М.НАУКА, 1976.

[42] Манаков, Ю.М., Исследование влияния тонких эффектов в движении ИСЗ, МИИГАиК, 1977.

[43] Брумберг, В.А., Релятивистская небесная механика, М.НАУКА, 1972.

[44] Баранов, В.Н.идр., Космическая Геодезия, М.НЕДРА, 1986.